

Примеры групп

- A11♦1.** Перечислите все подгруппы в группах диэдров D_4 и D_6 .
- A11♦2.** Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.
- A11♦3.** Наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n = e$ называется *порядком* элемента g и обозначается $\text{ord } g$. Верно ли, что: а) $\forall n \in \mathbb{N} \text{ ord}(g^n) = \text{ord}(g) / \text{НОД}(n, \text{ord}(g))$
б) $fg = gf \Rightarrow \text{ord}(fg) \mid \text{НОК}(\text{ord}(f), \text{ord}(g))$.
- A11♦4.** Чему может быть равен $\text{ord}(fg)$, если $\text{ord}(gf) = n$?
- A11♦5.** Все ли элементы нечётно порядка являются квадратами?
- A11♦6.** Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.
- A11♦7.** Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ число элементов порядка k в конечных группах G и H одинаково. Верно ли, что $G \simeq H$ для а) любых б) абелевых конечных групп G и H ?
- A11♦8.** Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?
- A11♦9.** Вычислите 100-ю степень перестановки $(3, 5, 4, 1, 2)$.
- A11♦10.** Сколько элементов S_5 неподвижно при сопряжении перестановкой $(3, 5, 1, 2, 4)$?
- A11♦11.** Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \text{Id}$. Верно ли, что а) любой цикл $\tau \in S_n$ длины ≥ 3 является композицией двух инволюций б) перестановка является инволюцией если и только если в её цикловом типе есть только циклы длины 1 и 2
- A11♦12 (Н. Н. Константинов).** В городе N разрешаются лишь простые двусторонние обмены квартир¹, причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен²?
- A11♦13*.** Можно ли в игре «15» осуществить транспозицию фишек «1» и «2» так, чтобы все остальные фишки в результате оказались в начальных своих положениях?
- A11♦14.** Говорят, что группа G порождается элементами $g_1, \dots, g_k \in G$, если любой $g \in G$ является произведением элементов g_i . Порождается ли а) S_n циклами $|1, 2\rangle$ и $|1, 2, 3, \dots, n\rangle$? б) A_n циклами $|1, 2, 3\rangle, |1, 2, 4\rangle, \dots, |1, 2, n\rangle$?
- A11♦15.** Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?
- A11♦16.** Найдите порядки собственной и несобственной групп а) пяти платоновых тел в \mathbb{R}^3 и правильных четырёхмерных б) куба в) кокуба³ г) симплекса⁴ д*) октаплекса⁵.
- A11♦17.** У каких платоновых тел полная группа изоморфна прямому произведению собственной группы на группу знаков $\{\pm 1\}$?
- A11♦18.** При каких n и m группа диэдра D_{mn} изоморфна $D_m \times \mathbb{Z}/(n)$?
- A11♦19.** Убедитесь, что *кватернионные единицы* $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с таким умножением, что e является единицей, «минус на минус даёт плюс», $i^2 = j^2 = k^2 = -e$ и $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, образуют группу. Изоморфна ли она D_4 ?
- A11♦20.** Найдите все пары изоморфных групп в наборах: а) $D_8, D_4 \times \mathbb{Z}/(2), Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$
б) $S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(4), Q_8 \times \mathbb{Z}/(3), D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$.

¹Когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B , а B — в квартиру, принадлежавшую A ; все более сложные обмены, скажем, когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B , B — в квартиру, принадлежавшую C , а уже C — в квартиру, принадлежавшую A , запрещены.

²Т. е. произвольную биекцию из множества квартир в себя.

³Выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$, где e_1, e_2, e_3, e_4 образуют стандартный базис в \mathbb{R}^4 .

⁴Выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 в \mathbb{R}^5 .

⁵Выпуклой оболочки вершин кокуба и вершин куба $|x_i| \leq c$, вписанного в единичную сферу с центром в нуле.