Модули над кольцами главных идеалов

А9◇1. Пусть для конечно порождённых модулей A, B, C над кольцом главных идеалов имеет место изоморфизм $A \oplus C \simeq B \oplus C$. Покажите, что $A \simeq B$.

А9◇2. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная
а) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$? **б)** $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$? **в)** $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

А9◇3. Изоморфны ли абелевы группы $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(36)$ и $\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(18)$?

А9◇4. Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

А9◇5. Напишите каноническое разложение[1] для аддитивных абелевых групп
а) $\mathbb{Z}/(6)$, $\mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(24)$ и $\mathbb{Z}/(60)$
б) всех абелевых групп порядка 4, 6, 8, 12, 16, 24, 36, 48
в) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(12)\big)$ **г)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(6)\big)$ **д)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(18)\big)$
е) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(4), \mathbb{Z}/(8)\big)$ **ж)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}/(8)\big)$

А9◇6. Напишите каноническое разложение для фактора решётки $\mathbb{Z}^3$ по подрешётке, порождённой векторами: **а)** $(7,2,3)$, $(21,8,9)$, $(5,-4,3)$ **б)** $(4,5,3)$, $(5,6,5)$, $(8,7,9)$
в) $(2,-4,6)$, $(6,-6,10)$, $(2,5,8)$, $(6,0,5)$ **г)** $(-81,-6,-33)$, $(60,6,24)$, $(-3,6,-3)$, $(18,6,6)$
д) $(-62,-8,-26)$, $(40,10,16)$, $(22,-8,10)$, $(20,2,8)$

А9◇7. Найдите в абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3, порядок элемента
а) $a_1 + 2a_3$, если $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$
б) $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$.

А9◇8. Рассмотрим в абелевой группе $A = \mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(27)$ элементы $a = ([1]_9, 0)$ и $b = (0, [1]_{27})$. Напишите каноническое разложение для фактора группы A по подгруппе, порождённой элементом $3a + 9b$.

А9◇9. Пусть порядок конечно порождённой абелевой группы A делится на m. Верно ли, что в A есть подгруппа порядка m?

А9◇10. Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ число элементов порядка m в двух конечных абелевых группах A и B одинаково. Обязательно ли $A \simeq B$?

А9◇11. Модуль с одной образующей называется *циклическим*. Верно ли, что
а) всякий циклический $\mathbb{Z}$-модуль изоморфен либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}/(n)$?
б) $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/(n) \oplus \mathbb{Z}/(m)$ циклический если и только если $\text{нод}(m,n) = 1$?

А9◇12*. Пусть конечно порождённые свободные $\mathbb{Z}$-модули $N \subset L$ таковы, что фактор L/N конечен. Свободны ли модули $L' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ и $N' = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}) \mid \varphi(N) \subset \mathbb{Z}\}$? Как связаны между собой L/N и N'/L'? Одинаково ли у них число элементов?

А9◇13*. Докажите, что при $n \geqslant 3$ мультипликативная группа обратимых элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}/\big(2^n\big)$ изоморфна прямой сумме мультипликативной группы $\{\pm 1\}$ и аддитивной группы $\mathbb{Z}/\big(2^{n-2}\big)$.

[1] Т. е. разложение в прямую сумму $\mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{p,\mu} \mathbb{Z}/\big(p^\mu\big)$, где $\mu, p \in \mathbb{N}$ и все p простые.