Степенные ряды и элементарные функции

A4⋄1. Пусть $g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$, где все $\alpha_i \in \Bbbk$ различны. Покажите, что для любого $f \in \Bbbk[x]$ с $\deg f < n$ дробь $f/g \in \Bbbk(x)$ равна сумме простейших дробей $\frac{f(\alpha_i)/g'(\alpha_i)}{x-\alpha_i}$.

A4⋄2. Явно выразите через n коэффициент при t^n у формального степенного ряда: **а)** $(2t^2-3t+1)^{-1}$ **б)** $(t^4+2t^3-7t^2-20t-12)^{-1}$ **в)** $\sqrt[3]{1+2t}$ **г)** $1/\sqrt{1-3t}$

A4⋄3. Найдите k-тый член последовательности $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ с $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

A4⋄4. Покажите, что ряд $e^x = \sum_{k\geqslant 0} x^k/k!$ не лежит в $\mathbb{Q}(x)$.

A4⋄5. Напишите ряд с коэффициентами 0 и 1, не являющийся рациональной функцией.

A4⋄6*. Покажите, что все коэффициенты ряда $\operatorname{tg}(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -i\frac{e^{it}-e^{-it}}{e^{it}+e^{-it}}$ положительны.

A4⋄7. Пусть $p_m(0) = 1$, а $p_m(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ равно количеству диаграмм Юнга веса n из $\leqslant m$ строк. Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$ и покажите, что $\sum_{n\geqslant 0} p_m(n)\,t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

A4⋄8* (теорема Эйлера о пятиугольных числах). Обозначим через $p(n)$ число всех диаграмм Юнга веса n, а через $\widehat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\widehat{p}_{\text{н}}(n)$ количества диаграмм веса n, у которых нет строк одинаковой длины и которые состоят, соответственно, из чётного и нечётного числа строк. Положим $p(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} p(n)\,t^n \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$. Покажите, что **а)** $P(t) = \prod_{k\geqslant 1}(1-t^k)^{-1}$ **б)** $1/P(t) = 1 + \sum\limits_{n\geqslant 1} t^n\left(\widehat{p}_{\text{ч}}(n) - \widehat{p}_{\text{н}}(n)\right)$ **в)** $p(n) = \sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\left(p\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+p\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)\right)$. **г)** Вычислите $p(10) = p(9)+p(8)-p(5)-p(3)$.

A4⋄9*. Найдите число разбиений выпуклого n-угольника на треугольники не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

A4⋄10*. Убедитесь, что каждый ряд $A(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_k t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ задаёт линейное отображение $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} A\left(\frac{d}{dx}\right) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $g \mapsto a_0 g + a_1 g' + a_2 g'' + a_3 g''' + \dots$, причём сопоставление $A \mapsto \widetilde{A}$ является инъективным гомоморфизмом $\mathbb{Q}$-алгебр[1], образ которого состоит из всех линейных отображений $G : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, которые перестановочны **а)** со всеми сдвигами $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$ **б)** с разностным оператором $\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$.

A4⋄11*. Образ базисного монома $x^m \in \mathbb{Q}[x]$ под действием оператора $F\left(\frac{d}{dx}\right) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ называется m-тым *многочленом Аппеля* ряда $F \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ и обозначается $f_m(x) = F\left(\frac{d}{dx}\right)x^m$. Пусть $F(t) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\varphi_k}{k!}t^k$ (обратите внимание на знаменатели). Покажите, что: **а)** $\varphi_n = f_n(0)$ **б)** $f_n'(x) = nf_{n-1}(x)$ **в)** $f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_{n-k}(x)y^k$ **г)** $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_{n-k}x^k = (\varphi^{\downarrow}+x)^n$, где стрелка у $\varphi^{\downarrow}$ предписывает раскрывать бином $(\varphi+x)^n$ заменяя все φ^k на φ_k.

A4⋄12* (суммы степеней). Ряд $\operatorname{td}(t) = t/(1-e^{-t}) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{b_k}{k!}t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ называется *рядом Тодда*, его коэффициенты b_k — *числами Бернулли*, а его многочлены Аппеля $B_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{td}\left(\frac{d}{dx}\right)x^k$ — *многочленами Бернулли*. Докажите, что следующие условия на последовательность многочленов $s_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентны: **а)** $s_{n+1}(m) = 0^n + 1^n + \dots + m^n\ \forall\, m,n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ **б)** $s_{n+1}(0) = 0$ и $\nabla s_{n+1}(x) = x^n$ **в)** $s_{n+1}(0) = 0$ и $s_{n+1}'(x) = \operatorname{td}\left(\frac{d}{dx}\right)x^n$ **г)** $(n+1)\,s_{n+1}(x) = B_{n+1}(x) - b_{n+1} = (b^{\downarrow}+x)^{n+1} - b_{n+1}$. Явно вычислите левую часть в (а) для всех $1 \leqslant n \leqslant 6$.

A4⋄13*. Покажите, что **а)** $b_{2k+1} = 0$ при $k \geqslant 1$ **б)** последовательность b_{2k} знакопеременна.

---

[1] Т. е. линейно над $\mathbb{Q}$ и переводит сложение и умножение рядов соответственно в сложение и композицию линейных отображений.