Множества и отображения

А1◇1. Сколько подмножеств (включая $\varnothing$ и X) у множества X, состоящего из n элементов?

А1◇2. Выразите пересечение множеств через разность множеств. Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?

А1◇3. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах **а)** шнурок **б)** курок **в)** колобок **г)** $\text{а}\dots\text{аб}\dots\text{б}$ (α букв а и β букв б) **д)** $\text{б}_1\dots\text{б}_1\text{б}_2\dots\text{б}_2\ \dots\dots\dots\ \text{б}_m\dots\text{б}_m$ (β_k букв б_k для каждого $k = 1, 2, \dots, m$).

А1◇4. Раскройте скобки и прведите подобные слагаемые в выражениях
а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2$ **б)** $(a + b + c)^3$ **в)** $(a + b)^n$ **г)** $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$.

А1◇5. Сколько имеется различных одночленов от n переменных полной степени[1]
а) ровно d **б)** не больше d ?

А1◇6. Цело ли число $1000!/\left(100!^{10}\right)$?

А1◇7. Сколько имеется таких отображений из пятиэлементного множества в двухэлементное, чтобы у каждой точки было не менее двух прообразов?

А1◇8. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$. Сколько имеется отображений $\{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$
а) произвольных **б)** биективных **в)** возрастающих[2] **г)** инъективных
д) неубывающих[3] **е)** сюрьективных неубывающих **ж*)** сюрьективных ?

А1◇9. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$
а) в натуральных **б)** в целых неотрицательных числах x_i?

А1◇10. Сколько всего диаграмм Юнга[4] **а)** веса 6 **б)** веса 7, содержащих не более 3 строк **в)** без ограничений на вес, но содержащих не более p строк и не более q столбцов.

А1◇11. Даны 4 попарно различных чашки, 4 неотличимых друг от друга стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 соломинок всех цветов радуги. Сколькими способами можно разложить: **а)** соломинки по чашкам **б)** сахар по чашкам **в)** сахар по стаканам **г)** соломинки по стаканам?

А1◇12. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания не оставалось пустых ёмкостей?

А1◇13* (теорема Хаусдорфа о максимальной цепи). Докажите, что в любом ЧУМе[5] каждая цепь[6] содержится в некоторой максимальной по включению цепи[7].

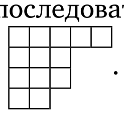
А1◇14* (теорема Цермелло). Докажите, что каждое множество можно вполне упорядочить[8].

---

[1] *Полной степенью* одночлена $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ называется сумма $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

[2] Отображение f называется *возрастающим*, если $\forall\, x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

[3] Отображение f называется *неубывающим*, если $\forall\, x_1, x_2 \quad x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

[4] *Диаграмма Юнга* λ — это невозрастающая последовательность $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ неотрицательных целых чисел. Диаграмму $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ удобно рисовать как . Числа $\ell(\lambda) \overset{\text{def}}{=} k$ и $|\lambda| \overset{\text{def}}{=} \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ называются соответственно *числом строк* (или *высотой*) и *весом* диаграммы λ. У нарисованной диаграммы $\ell(\lambda) = 4$, $|\lambda| = 13$.

[5] Т. е. в любом частично упорядоченном множестве.

[6] Т. е. линейно упорядоченное подмножество.

[7] ПОДСКАЗКА: убедитесь, что множество P всех цепей, содержащих данную цепь, является полным ЧУМом относительно частичного порядка, задаваемого включением, и примените лемму Цорна.

[8] ПОДСКАЗКА: рассмотрите множество $\mathcal{S}(X)$ всех непустых подмножеств заданного множества X, включая само X, и при помощи аксиомы выбора постройте такое отображение $\mu : \mathcal{S}(X) \to X$, что $\mu(Z) \in Z$ для всех $Z \in \mathcal{S}(X)$; далее рассмотрите множество $\mathcal{W}(X)$, состоящее из всех множеств $W \in \mathcal{S}(X)$, которые можно вполне упорядочить таким образом, что $\mu(X \smallsetminus [w)) = w$ для всех $w \in W$; проверьте, что $\mathcal{W}(X) \neq \varnothing$, и убедитесь, что $X \in \mathcal{W}(X)$.