§15. Эрмитовы пространства

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{C}$.

15.1. Эрмитова геометрия. Векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым* (или *унитарным*), если на нём задано билинейное над подполем $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ скалярное произведение $W \times W \to \mathbb{C}$, обозначаемое (w_1, w_2) или $w_1 \cdot w_2$ и обладающее следующими тремя свойствами:

$$\begin{aligned}
&\forall\, w_1, w_2,\ \forall\, z \quad (zw_1, w_2) = z\,(w_1, w_2) = (w_1, \bar{z}w_2) && \text{(полуторалинейность)}\\
&\forall\, w_1, w_2 \quad (w_1, w_2) = \overline{(w_2, w_1)} && \text{(эрмитова симметричность)}\\
&\forall\, w \neq 0 \quad (w, w) > 0 && \text{(положительность)}\,,
\end{aligned} \tag{15-1}$$

В силу второго свойства, скалярный квадрат $(w, w) = \overline{(w, w)}$ любого вектора $w \in W$ является вещественным числом, а последнее свойство утверждает, что это вещественное число положительно для всех ненулевых векторов. Скалярное произведение со свойствами (15-1) называется *эрмитовой* (или *унитарной*) *структурой* на комплексном векторном пространстве W.

Пример 15.1 (стандартная эрмитова структура на $\mathbb{C}^n$)
Координатное пространство $\mathbb{C}^n$ имеет *стандартную эрмитову структуру*, в которой строки $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ и $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ перемножаются по формуле

$$(z, w) = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + \dots + z_n\overline{w}_n\,. \tag{15-2}$$

Пример 15.2 (эрмитова структура на пространстве комплекснозначных функций)
На пространстве непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{C}$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ имеется эрмитово скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx\,, \tag{15-3}$$

где под интегралом от комплекснозначной функции f по определению понимается комплексное число, действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей функции f, которые являются обычными вещественными функциями:

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f)\,dx + i \cdot \int_a^b \mathrm{Im}(f)\,dx\,.$$

Разумеется, вместо отрезка можно рассматривать любое другое пространство, по которому можно интегрировать вещественные функции, например диск или какую-нибудь кривую в $\mathbb{C}$.

15.1.1. Эрмитова норма вектора. Пользуясь тем, что скалярный квадрат любого вектора в эрмитовом пространстве вещественен и положителен, определим *эрмитову норму* (или *длину*) вектора $w \in W$ формулой[1]

$$\|w\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,. \tag{15-4}$$

[1] Мы используем обозначение $\|w\|$, чтобы отличать нормы *векторов* $w \in W$ от модулей комплексных *чисел* $z \in \mathbb{C}$, которые будем обозначать, как и раньше, через $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Эрмитова структура однозначно восстанавливается по норме, так как из равенств

$$(w_1+w_2, w_1+w_2) = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w_1, w_2)$$
$$(w_1+iw_2, w_1+iw_2) = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(w_1, w_2)\,,$$

вытекает равенство

$$2(w_1, w_2) = \|w_1+w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2 + i(\|w_1+iw_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2)\,. \tag{15-5}$$

15.1.2. Ортогонализация Грама – Шмидта. Базис $e_1, \dots, e_n$ эрмитова пространства W называется *ортонормальным*, если $\|e_i\| = 1$ при всех i и $(e_i, e_j) = 0$ при всех $i \neq j$. Так же, как и в евклидовом пространстве, из любого базиса $w_1, \dots, w_n$ в W можно изготовить такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, линейная оболочка первых первых k базисных векторов которого при каждом k совпадает с линейной оболочкой первых первых k базисных векторов исходного базиса. Векторы e_i находятся по рекурсивным формулам

$$\begin{gathered} e_1 = w_1 \,/\, \sqrt{(w_1, w_1)} \quad \text{и} \quad e_k = u_k \,/\, \sqrt{(u_k, u_k)} \text{ при } k > 1\,, \\ \text{где } u_k = w_k - \sum_{\nu=1}^{k-1} (w_k, e_\nu)\,. \end{gathered} \tag{15-6}$$

Упражнение 15.1. Убедитесь, что $\mathrm{span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{span}(w_1, \dots, w_k)$ при каждом k (в частности, все $u_k \neq 0$) и векторы $e_1, \dots, e_n$ действительно образуют ортонормальный базис.

15.1.3. Матрицы Грама. Эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама $G_{\boldsymbol{w}} = \big((w_i, w_j)\big) = \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространства W *эрмитово симметрична*, т. е. комплексно сопряжена транспонированной матрице:

$$G_{\boldsymbol{w}}^t = \overline{G}_{\boldsymbol{w}}\,.$$

В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения по второму аргументу, при линейной замене набора векторов по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uw}}$ матрица Грама меняется по правилу

$$G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{w} = (C_{\boldsymbol{uw}}^t \boldsymbol{u}^t) \cdot (\boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uw}}) = C_{\boldsymbol{uw}}^t (\boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u})\, \overline{C}_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uw}}^t G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{uw}}\,.$$

Ортонормальность набора векторов $\boldsymbol{e}$ означает, что его матрица Грама $G_{\boldsymbol{e}} = E$ единичная.

Лемма 15.1
Определитель Грама $\det G_{\boldsymbol{w}}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если этот набор линейно зависим.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ew}}$, где набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ составляет ортонормальный базис в линейной оболочке набора векторов $\boldsymbol{w}$. Тогда $G_{\boldsymbol{w}} = C_{\boldsymbol{ew}}^t \overline{C}_{\boldsymbol{ew}}$. Если набор w линейно зависим, то $n < m$ и $\mathrm{rk}\, G_{\boldsymbol{w}} \leqslant \min(\mathrm{rk}\, C_{\boldsymbol{ew}}^t, \mathrm{rk}\, \overline{C}_{\boldsymbol{ew}}) \leqslant n$ строго меньше размера матрицы, т. е. $\det G_{\boldsymbol{w}} = 0$. Если векторы $\boldsymbol{w}$ составляют базис своей линейной оболочки, то матрица $C_{\boldsymbol{ew}}$ невырождена, и $\det G_{\boldsymbol{w}} = \det C_{\boldsymbol{ew}}\, \overline{\det C_{\boldsymbol{ew}}} = |\det C_{\boldsymbol{ew}}|^2$ вещественен и положителен. □

15.1.4. Эрмитово двойственный базис. Для любого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ эрмитова пространства W существует единственный *эрмитово двойственный* базис $\boldsymbol{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$ со свойством

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{15-7}$$

На матричном языке эти соотношения означают, что взаимная матрица Грама

$$G_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u}^\times = E\,.$$

Подставляя сюда $\boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, где в j-м столбце матрицы $C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$ стоят координаты вектора $u_j^\times$ в базисе $\boldsymbol{u}$, и пользуясь полулинейностью скалярного произведения по второму аргументу, получаем $E = \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u}^\times = (\boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{u})\, \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, откуда

$$(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n)\, \overline{G}_{\boldsymbol{u}}^{-1}\,. \tag{15-8}$$

Упражнение 15.2. Убедитесь, что $\boldsymbol{u}^{\times\times} = \boldsymbol{u}$.

Из соотношений ортогональности (15-7) вытекает, что в разложении $w = \sum z_i u_i$ произвольного вектора $w \in W$ по базису $u_1, \dots, u_n$ коэффициент $z_i = (w, u_i^\times)$, в чём легко удостовериться, скалярно умножив обе части разложения справа на $u_i^\times$. Таким образом,

$$w = \sum_i u_i \cdot (w, e_i^\times)\,. \tag{15-9}$$

Обратите внимание, что ортонормальность базиса $\boldsymbol{e}$ равносильна равенству $\boldsymbol{e}^\times = \boldsymbol{e}$.

15.1.5. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника. Применяя лем. 15.1 к набору из двух векторов u, w, мы заключаем, что

$$\det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix} = \|u\|^2 \|w\|^2 - (u,w)\,\overline{(u,w)} \geqslant 0\,,$$

где равенство равносильно пропорциональности векторов u и w над полем $\mathbb{C}$. Таким образом, в эрмитовом пространстве выполняется *неравенство Коши – Буняковского – Шварца*

$$|(u,w)| \leqslant \|u\| \cdot \|w\|\,, \tag{15-10}$$

равенство в котором равносильно комплексной пропорциональности u и w. Далее,

$$\begin{aligned} \|u+w\|^2 = (u+w, u+w) = \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u,w) \leqslant \\ \leqslant \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2|(u,w)| \leqslant \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\|u\|\,\|w\| = \big(\|w_1\| + \|w_2\|\big)^2\,, \end{aligned}$$

где второе неравенство — это неравенство Коши – Буняковского – Шварца, а первое неравенство $2\mathrm{Re}\,(u,w) \leqslant |(v,w)|$ для комплексно пропорциональных векторов $u = zw$ обращается в равенство если и только если коэффициент пропорциональности $z \in \mathbb{R}$ и неотрицателен, ибо $\mathrm{Re}(zw, w) = (w,w)\,\mathrm{Re}(z)$, т. к. $(w,w) \in \mathbb{R}$ и неотрицательно. Мы заключаем, что для любых двух векторов u, w эрмитова пространства выполняется *неравенство треугольника*

$$\|u\| + \|w\| \geqslant \|u+w\|\,, \tag{15-11}$$

становящееся равенством если и только если $u = \lambda w$ с вещественным неотрицательным λ.

15.1.6. Угол между комплексными прямыми. Напомню, что на вещественной евклидовой плоскости угол φ, равный меньшему из двух смежных углов между прямыми, параллельными векторам u и w, имеет

$$\cos\varphi = \frac{|(u,w)|}{\|u\|\cdot\|w\|} = |(u/\|u\|, w/\|w\|)|\,. \tag{15-12}$$

На геометрическом языке, векторы $u/\|u\|$ и $w/\|w\|$ являются единичными направляющими векторами рассматриваемых прямых, и каждый из них определяется этим свойством однозначно с точностью до умножения на ± 1. Выбор знаков определяет выбор одного из четырёх углов, на которые эти прямые разбивают плоскость, и меньший из углов получается при таком выборе знаков, что скалярное произведение неотрицательно.

Двумерное комплексное пространство, натянутое на непропорциональные векторы u, w эрмитова пространства W с вещественной точки зрения представляет собой четырёхмерное пространство $\mathbb{R}^4$, в котором комплексные прямые $\mathbb{C}\,u$ и $\mathbb{C}\,w$ образуют пару трансверсальных двумерных вещественных плоскостей с нулевым пересечением. Объемлющее пространство $\mathbb{R}^4$ не разбивается этими плоскостями ни на какие связные компоненты, и в каждой из плоскостей концы векторов единичной длины пробегают единичную окружность. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной трёхмерной сфере

$$S^3 = \{\, u \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}\,u \oplus \mathbb{C}\,w \mid \|u\| = 1 \,\}\,,$$

состоящей из векторов единичной длины в $\mathbb{R}^4$. Поэтому длины больших дуг[1], соединяющих точку на одной из окружностей с точкой на другой, ограничены снизу и достигают своего минимального значения. Иначе говоря, угол между вещественными прямыми $\mathbb{R}\cdot e_1$ и $\mathbb{R}\cdot e_2$, параллельными всевозможным векторам $e_1 \in \mathbb{C}\,u$ и $e_2 \in \mathbb{C}\,w$ единичной длины, достигает на некоторой паре векторов своего минимума. Такой минимальный угол φ и называется углом между (комплексными) одномерными подпространствами $\mathbb{C}\,u$ и $\mathbb{C}\,w$ в эрмитовом пространстве W.

Предложение 15.1

Косинус угла φ между натянутыми на векторы u и w одномерными подпространствами эрмитова пространства W вычисляется по той же формуле (15-12), что и в евклидовом пространстве:

$$\cos\varphi = \frac{|(u,w)|}{\|u\|\cdot\|w\|}\,. \tag{15-13}$$

Доказательство. Запишем эрмитово скалярное произведение на пространстве W в виде

$$(u,w) = g(u,w) + i\omega(u,w)\,,$$

где $g(u,w) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(u,w)$ и $\omega(u,w) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(u,w)$ суть вещественная и мнимая части комплексного числа (u,w). Форма $g : W \times W \to \mathbb{R}$ вещественно билинейна, симметрична и положительна. Она задаёт на вещественном пространстве $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}\,u \oplus \mathbb{C}\,w$ евклидову структуру, в которой евклидова длина каждого вектора совпадает с его эрмитовой длиной, ибо $g(u,u) = (u,u)$ для всех $u \in W$. Форма $\omega(u_1,u_2)$ вещественно билинейна, кососимметрична (ибо $\omega(u,u) = 0$ для всех $u \in W$), и невырождена, так как $\omega(iu,u) = g(u,u) = \|u\|^2 \neq 0$ для любого $u \neq 0$. Когда вектор e_1 пробегает окружность векторов единичной длины на вещественной плоскости $\mathbb{C}\,u$, а

[1] Т. е. дуг, высекаемых на сфере S^3 всевозможными двумерными вещественными плоскостями, проходящими через центр этой сферы.

вектор e_2 — такую же окружность на плоскости $\mathbb{C}\,w$, сумма $g^2(e_1, e_2) + \omega^2(e_1, e_2) = |(e_1, e_2)|^2$ не меняется, так как для всех $t, s \in \mathbb{C}$ с $|t| = |s| = 1$ имеем $|(te_1, se_2)| = |t\overline{s}\,(e_1, e_2)| = |(e_1, e_2)|$. Минимальный из евклидовых углов φ между векторами e_1 и e_2 имеет максимально возможный $\cos^2\varphi = g^2(e_1, e_2)$. *A priori* максимальным значением для $g^2(e_1, e_2)$ является константа $|(e_1, e_2)|^2$. Это значение достигается векторах e_1, e_2 если и только если $\omega(e_1, e_2) = 0$. Так как форма ω невырождена, ω-ортогонал $v^{\perp}_{\omega} = \{v' \in \mathbb{R}^4 \mid \omega(v, v') = 0\}$ к любому ненулевому вектору $v \in \mathbb{R}^4$ является трёхмерной вещественной гиперплоскостью в $\mathbb{R}^4$ и имеет ненулевое пересечение с двумерным вещественным подпространством $\mathbb{C}\,w$. Мы заключаем, что для каждого единичного вектора $e_1 \in \mathbb{C}\,u$ евклидов угол между векторами e_1 и e_2 достигает своего минимального значения на некотором единичном векторе $e_2 \in \mathbb{C}\,w$, и косинус такого минимального угла равен равен $|(e_1, e_2)| = |(u/\|u\|, w/\|w\|)|$. □

Замечание 15.1. В силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца правая часть в (15-13) принимает значения на отрезке $[0, 1]$, откуда $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

15.1.7. Унитарная группа. Линейный оператор $f : W \to W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если $\|fw\| = \|w\|$ для всех $w \in W$. Согласно формуле (15-5), каждый такой оператор f сохраняет скалярное произведение: $(fu, fw) = (u, w)$ для всех $u, w \in W$. Тем самым, матрица F унитарного оператора f в любом базисе связана с матрицей Грама G этого базиса соотношением

$$F^t \cdot G \cdot \overline{F} = G\,. \tag{15-14}$$

Беря определители и сокращая на $\det G \neq 0$, получаем $\det^2 F = 1$, откуда $|\det F| = 1$. В частности, каждый унитарный оператор f обратим, причём матрица обратного оператора в любом базисе выражается через F и G по формуле $F^{-1} = \overline{G}^{-1}\overline{F}^t\overline{G} = (G^t)^{-1}\overline{F}^t G^t$, которая в ортонормальном базисе с $G = E$ редуцируется до $F^{-1} = \overline{F}^t$.

Унитарные операторы составляют *унитарную группу* пространства W, которая обозначается $\mathrm{U}(W)$. Запись унитарных операторов матрицами в каком-нибудь ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ отождествляет эту группу с группой *унитарных матриц*

$$\mathrm{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\}\,.$$

Подчеркнём, что в отличие от вещественных ортогональных матриц определители унитарных матриц могут принимать не только значения ± 1, но любые значения на единичной окружности в $\mathbb{C}$, которая является ни чем иным, как унитарной группой $\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\,\overline{z} = 1\}$. Поэтому в эрмитовом пространстве нет понятия *ориентации*: в n° 15.5.1 на стр. 231 ниже мы увидим, что группа U_n представляет собою компактное *линейно связное* подмножество в пространстве комплексных матриц.

Подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$ унитарных матриц определителя 1 называется *специальной унитарной* группой.

15.1.8. Эрмитов объём. Выберем какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$ эрмитова пространства W в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём* n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v = e\,C_{ev}$ формулой $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det C|$. Поскольку модуль определителя матрицы перехода между ортонормальными базисами равен единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, и квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен определителю Грама:

$$\mathrm{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{ev}|^2 = \det C^t_{ev} \cdot \overline{\det C_{ev}} = \det G_v\,.$$

15.1.9. Ортогональное проектирование. В эрмитовом пространстве W для любого подпространства $U \subset W$ и любого вектора $w \in W$ имеется единственный вектор $\pi_U(w) \in U$, обладающий следующими эквивалентными друг другу свойствами:

(1) $w - \pi_U(w) \in U^\perp \overset{\text{def}}{=} \{v \in W \mid \forall\, u \in U\ (u, v) = 0\}$

(2) $(u, w) = (u, \pi_U(w))$ для всех $u \in U$

(3) вектор $\pi_U(w)$ является ближайшим к w вектором из U в том смысле, что для всех отличных от него векторов $u \in U$ выполняется строгое неравенство $\|w - \pi_U(w)\| < \|w - u\|$.

Свойства (1) и (2) равносильны, поскольку равенства $(u, w) = (u, \pi_U(w))$ и $(u, w - \pi_U(w)) = 0$ равносильны друг другу. Если вектор $\pi_U(w)$ обладает свойствами (1) и (2), то он обладает и свойством (3), так как для любого ненулевого вектора $u \in U$

$$\|w - (\pi_U(w) + u)\|^2 = \|(w - \pi_U(w)) - u\|^2 = \|w - \pi_U(w)\|^2 + \|u\|^2 > \|w - \pi_U(w)\|^2 .$$

С другой стороны, вектор обладающий свойством (3), очевидно, единствен, а обладающий свойствами (1) и (2) вектор $\pi_U(w)$ можно предъявить явно. Для этого выберем в U произвольный базис $u_1, \dots, u_n$, рассмотрим эрмитово двойственный к нему базис[1] $u_1^\times, \dots, u_n^\times$ и положим

$$\pi_U(w) = \sum_i (u_i, w)\, u_i^\times . \tag{15-15}$$

Так как равенство из свойства (2) линейно по u, его достаточно проверить только на базисных векторах $u = u_k$, и в этом случае $(u_k, \pi_U(w)) = (u_k, \sum_i (w, u_i)\, u_i^\times) = \sum_i \overline{(w, u_i)} (u_k, u_i^\times) = (u_k, w)$, как и требуется.

Упражнение 15.3. Покажите, что $\pi_U(w) = \sum_i (u_i^\times, w)\, u_i$.

Итак, каждый вектор $w \in W$ допускает единственное разложение $w = \pi_U(w) + \pi_{U^\perp}(w)$, где $\pi_U(w) \in U$, а $\pi_{U^\perp}(w) = w - \pi_U(w) \in U^\perp$. Это означает, в частности, что $W = U \oplus U^\perp$. Подпространство $U^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к U, а линейный оператор

$$\pi_U : W \twoheadrightarrow U , \quad w \mapsto \pi_U(w) ,$$

проектирующий W на U вдоль $U^\perp$, называется *ортогональной проекцией* на U. Явно вычислить ортогональную проекцию можно по формуле (15-15) или двойственной формуле из упр. 15.3.

15.2. Сопряжение линейных отображений. Линейные отображения $f : U \to W$ и $f^\times : W \to U$ между эрмитовыми пространствами U и W называются *сопряжёнными*, если для всех $u \in U$ и $w \in W$ выполняется равенство $(fu, w) = (u, f^\times w)$. Это эквивалентно требованию, чтобы для произвольно выбранных базисов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ при всех i, j выполнялись равенства $(fu_i, w_j) = (u_i, f^\times w_j)$, что равносильно соотношению

$$F_{\boldsymbol{wu}}^t G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{F}_{\boldsymbol{uw}}^\times$$

на матрицы $F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F_{\boldsymbol{uw}}^\times$ операторов f и $f^\times$ в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ и матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}}$ и $G_{\boldsymbol{w}}$ этих базисов.

Упражнение 15.4. Убедитесь в этом.

[1] См. n° 15.1.4 на стр. 220.

Таким образом, матрица сопряжённого оператора выражается через матрицу исходного оператора и матрицы Грама по формуле

$$F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = \overline{G^{-1}_{\boldsymbol{u}} F^{t}_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}}}\,. \tag{15-16}$$

В ортонормальных базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ эта формула упрощается до $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = \overline{F}^{t}_{\boldsymbol{wu}}$. Мы заключаем, что у каждого оператора имеется ровно один сопряжённый, и сопряжение операторов

$$\mathrm{Hom}(U, W) \simeq \mathrm{Hom}(W, U)\,, \quad f \mapsto f^{\times}\,,$$

является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом комплексных векторных пространств, т. е. $(\lambda f + \mu g)^{\times} = \overline{\lambda} f^{\times} + \overline{\mu} g^{\times}$ для всех $f, g \in \mathrm{Hom}(U, W)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Предложение 15.2

Для любого линейного отображения $f : U \to W$ выполняются равенства

$$f^{\times\times} = f\,, \quad \ker f^{\times} = (\operatorname{im} f)^{\perp}\,, \quad \operatorname{im} f^{\times} = (\ker f)^{\perp}\,,$$

а для пары линейных отображений $f : U \to V$, $g : V \to W$ — равенство $(gf)^{\times} = f^{\times} g^{\times}$.

Доказательство. Первое равенство $f^{\times\times} = f$ проверяется выкладкой

$$(f^{\times} w, u) = \overline{(u, f^{\times} w)} = \overline{(fu, w)} = (w, fu)\,,$$

а последнее равенство $(gf)^{\times} = f^{\times} g^{\times}$ — выкладкой $(gfu, w) = (fu, g^{\times} w) = (u, f^{\times} g^{\times} w)$. Вектор $w \in \ker f^{\times}$ если и только если для всех $u \in U$ выполняется равенство $0 = (u, f^{\times} w) = (fu, w)$, означающее, что $w \in \operatorname{im} f^{\perp}$. Тем самым, $\ker f^{\times} = (\operatorname{im} f)^{\perp}$. Написав это равенство для оператора $f^{\times}$ в роли f и взяв ортогоналы к обеим частям, получаем $(\ker f)^{\perp} = \operatorname{im} f^{\times}$. □

15.2.1. Сопряжение эндоморфизмов. Если пространство U совпадает с W, сопряжение операторов задаёт вещественно линейный комплексно полулинейный инволютивный[1] антиавтоморфизм[2] алгебры $\mathrm{End}(W)$ комплексно линейных операторов $W \to W$. Согласно прим. 10.3 на стр. 142 пространство $\mathrm{End}(W)$ распадается над полем вещественных чисел в прямую сумму собственных подпространств инволюции $f \mapsto f^{\times}$ с собственными числами ± 1. Они обозначаются

$$\mathrm{End}_{+}(W) = \{ f : W \to W \mid f^{\times} = f \} \tag{15-17}$$

$$\mathrm{End}_{-}(W) = \{ f : W \to W \mid f^{\times} = -f \} \tag{15-18}$$

и называются пространствами *самосопряжённых* (или *эрмитовых*) и *антисамосопряжённых* (или *косоэрмитовых*) операторов соответственно. Таким образом, для эрмитова оператора f при всех $u, w \in W$ выполняется равенство $(fu, w) = (u, fw)$, а для косоэрмитова — равенство $(fu, w) = -(u, fw)$. В ортонормированном базисе самосопряжённые операторы задаются *эрмитово симметричными* матрицами $F^{t} = \overline{F}$, а антисамосопряжённые — *эрмитово кососимметричными* матрицами $F^{t} = -\overline{F}$.

Эрмитова и антиэрмитова компоненты $f_{+} \in \mathrm{End}_{+}(W)$ и $f_{-} \in \mathrm{End}_{-}(W)$ произвольного оператора $f : W \to W$ в разложении

$$\mathrm{End}(W) = \mathrm{End}_{+}(W) \oplus \mathrm{End}_{-}(W) \tag{15-19}$$

[1] Т. е. обратный самому себе.

[2] Т. е. оборачивающий порядок сомножителей в произведениях.

находятся по формулам $f_+ = (f + f^\times)/2$ и $f_- = (f - f^\times)/2$.

Подчеркнём, что разложение (15-19) определено над полем $\mathbb{R}$, и его компоненты $\mathrm{End}_\pm(W)$ являются *вещественными*, но *не комплексными* векторными подпространствами комплексного векторного пространства $\mathrm{End}(W)$. Умножение на комплексное число i биективно переводит компоненты $\mathrm{End}_\pm(W)$ друг в друга, устанавливая между ними $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм.

Упражнение 15.5. Убедитесь, что оператор f эрмитов если и только если оператор if косоэрмитов.

Пример 15.3 (унитарные операторы)
Так как каждый унитарный оператор[1] биективен, всякий вектор $w \in W$ можно записать в виде $f^{-1}v$ для некоторого $v \in W$. Поэтому выполнение для всех u, w равенства $(fu, fw) = (u, w)$ равносильно выполнению для всех u и $v = fw$ равенства $(fu, v) = (u, f^{-1}v)$. Таким образом, унитарную группу пространства W можно охарактеризовать как множество обратимых операторов, сопряжённых своим обратным:

$$\mathrm{U}(W) = \left\{ f \in \mathrm{End}(W) \mid \forall\, u \in W \ \|fu\| = \|u\| \right\} = \left\{ f \in \mathrm{GL}(W) \mid f^\times = f^{-1} \right\}.$$

15.2.2. Сопряжение операторов в евклидовом пространстве. На алгебре $\mathbb{R}$-линейных эндоморфизмов $\mathrm{End}(V)$ вещественного евклидова пространства V требование

$$\forall\, u, w \in V \quad (fu, w) = (u, f^\times w)$$

также корректно определяет операцию сопряжения $f \leftrightarrow f^\times$. Эта операция является инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathrm{End}(V)$. Матрица $F^\times$ сопряжённого оператора в произвольном базисе связана с матрицей Грама G этого базиса и матрицей F исходного оператора по формуле $F^\times = G^{-1}F^tG$, которая в ортонормальном базисе упрощается до $F^\times = F^t$. Пространство $\mathbb{R}$-линейных эндоморфизмов евклидова пространства V также раскладывается в прямую сумму $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_+(V) \oplus \mathrm{End}_-(V)$ подпространств (анти) самосопряжённых операторов

$$\mathrm{End}_\pm(V) = \{ f \mid f^\times = \pm f \}.$$

В ортонормальном базисе пространства V (анти) самосопряжённые операторы имеют в (косо) симметричные матрицы. При этом ортогональные[2] операторы на евклидовом пространстве характеризуются как операторы, сопряжённые к своим обратным.

Пример 15.4 (сопряжение дифференциальных операторов)
Обозначим через V пространство бесконечно дифференцируемых функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, которые обращаются на концах отрезка в нуль вместе со всеми своими производными, и введём на V евклидово скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

[1] См. n° 15.1.7 на стр. 222.

[2] Т. е. сохраняющие евклидову длину векторов или, что равносильно, евклидово скалярное произведение.

Интегрирование по частям показывает, что дифференцирование $\frac{d}{dt} : f \mapsto f'$ является антисамосопряжённым линейным оператором:

$$\left(\frac{d}{dt}f\,,\,g\right) = \int\limits_a^b f'g\,dt = -\int\limits_a^b fg'\,dt = \left(f\,,\,-\frac{d}{dt}g\right).$$

Умножение на любую заданную функцию $g : f \mapsto gf$ является самосопряжённым оператором. Поскольку сопряжение является антигомоморфизмом по отношению к композиции, оператор, сопряжённый к линейному дифференциальному оператору вида

$$t^3\frac{d^2}{dt^2} : f(t) \mapsto t^3 f''(t)\,,$$

переводит функцию f в функцию $\left(t^3 f\right)'' = 6tf + 6t^2 f' + t^3 f''$, т. е. имеет вид

$$\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}\right]^* = t^3\frac{d^2}{dt^2} + 6t^2\frac{d}{dt} + 6t\,.$$

Упражнение 15.6. Вычислите оператор, сопряжённый к оператору

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t) : f \mapsto af'' + bf + c\,,$$

где $a, b, c \in V$.

15.3. Ортогональная диагонализация нормальных операторов. Оператор $f : W \to W$ на эрмитовом пространстве W называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряжённым, т. е. $f^\times f = ff^\times$. Например, все эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы нормальны, так как сопряжённый к такому оператору f оператор равен f, $-f$ и f^{-1} соответственно.

Теорема 15.1

Оператор f на конечномерном эрмитовом пространстве W нормален если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе пространства W. При этом диагональная матрица для f с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Если f диагонализуем в ортонормальном базисе, то сопряжённый к f оператор имеет в этом базисе сопряжённую диагональную матрицу, которая коммутирует с диагональной матрицей оператора f. Поэтому f нормален. Так как диагональные элементы любой диагональной матрицы, задающей оператор f, представляют собою собственные числа оператора f, и каждое из них присутствует на диагонали столько раз, какова размерность отвечающего ему собственного подпространства, диагональные элементы с точностью до перестановки не зависят от выбора базиса, в котором матрица диагональна.

Диагонализуемость нормального оператора $f : W \to W$ в ортонормальном базисе доказывается индукцией по $\dim W$. Если оператор f скалярен (что так при $\dim W = 1$), то он диагонален в любом базисе. Если $\dim W > 1$ и оператор f не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство $V_\lambda \subsetneq W$, и $W = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$. Поскольку оператор $f^\times$ перестановочен с f, он переводит собственное подпространство V_λ в себя[1]. Поэтому для всех $u \in V_\lambda$ и любого

[1]См. n° 10.2.7 на стр. 142.

$w \in V_\lambda^\perp$ выполняется равенство $(fw, u) = (w, f^\times u) = 0$, означающее, что $fw \in V_\lambda^\perp$. Таким образом, оператор f переводит подпространство $V_\lambda^\perp$ в себя. По индукции, ограничение f на $V_\lambda^\perp$ диагонализуемо в некотором ортонормальном базисе пространства $V_\lambda^\perp$. Добавляя к этому базису любой ортонормальный базис собственного подпространства V_λ, получаем ортонормальный базис пространства W, в котором матрица оператора f диагональна. □

Следствие 15.1
Оператор самосопряжён если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе и все его собственные числа вещественны.

Следствие 15.2
Оператор антисамосопряжён если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе и все его собственные числа чисто мнимы.

Следствие 15.3
Оператор унитарен если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе и все его собственные числа лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Упражнение 15.7. Покажите, что унитарная группа U_n является компактным линейно связным подмножеством пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

15.4. Сингулярные числа и сингулярные направления. В этом разделе мы покажем, что каждое линейное отображение $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U и W однозначно раскладывается в композицию $f = gh\pi$, где $\pi : U \twoheadrightarrow V$ — ортогональная проекция на ортогональное дополнение $V \overset{\text{def}}{=} (\ker F)^\perp$ к ядру оператора F, оператор $h : V \to V$ самосопряжён и имеет положительные собственные числа[1], а $g : V \hookrightarrow W$ — унитарное вложение, сохраняющее скалярное произведение. Попарно перпендикулярные собственные векторы, вдоль которых растягивает подпространство $V \subset U$ самосопряжённый оператор $h : V \to V$, и положительные вещественные коэффициенты этих растяжений называются *сингулярными направлениями* и *сингулярными числами* линейного отображения f.

Лемма 15.2
Для любого линейного отображения $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W обе композиции $ff^\times \in \mathrm{End}(W)$, $f^\times f \in \mathrm{End}(U)$ являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение f сюрьективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора $ff^\times$ (соотв. $f^\times f$) строго положительны.

Доказательство. Каждый из операторов $ff^\times$ и $f^\times f$ очевидно самосопряжён и следовательно диагонализуем по сл. 15.1 на стр. 227. Если для некоторого ненулевого вектора $w \in W$ выполняется равенство $ff^\times w = \lambda w$, то $(f^\times w, f^\times w) = (ff^\times w, w) = \lambda \cdot (w, w)$ и либо $w \in \ker f^\times$ и $\lambda = 0$, либо $\lambda = (f^\times w, f^\times w)/(w, w) > 0$. Аналогично, если $f^\times f u = \mu u$ для ненулевого $u \in U$, то либо $\mu = 0$ и $u \in \ker f$, либо $\mu = (fu, fu)/(u, u) > 0$. Поэтому все ненулевые собственные числа каждого из операторов положительны. Если $\operatorname{im} f = W$, то[2] $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp = 0$, откуда все собственные числа оператора $ff^\times$ положительны. Наоборот, если $\operatorname{im} f \neq W$, то

[1]Т. е. по сл. 15.1 является растяжением с вещественными положительными коэффициентами во взаимно перпендикулярных комплексных направлениях.
[2]См. предл. 15.2 на стр. 224.

$\ker ff^{\times} \supset \ker f^{\times} = (\operatorname{im} f)^{\perp} \neq 0$. Аналогично, если $\ker f = 0$, то все собственные числа оператора $f^{\times}f$ строго положительны, и наоборот, если $\ker f \neq 0$, то и $\ker f^{\times}f \supset \ker f \neq 0$. $\square$

Теорема 15.2
Каждое линейное отображение $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W единственным образом раскладывается в композицию $f = g_f \circ h_f \circ \pi_f$ ортогональной проекции $\pi_f : U \twoheadrightarrow V$ на ортогональное дополнение $V \overset{\text{def}}{=} \ker^{\perp} f$ к ядру $\ker f \subset U$, невырожденного самосопряжённого оператора $h_f : V \xrightarrow{\sim} V$ с положительными собственными числами $\alpha_1, \dots \alpha_r$, где $r = \operatorname{rk} f = \dim \operatorname{im} f$, и унитарного[1] вложения $g_f : V \hookrightarrow W$. При этом набор $\alpha_1^2, \dots \alpha_r^2$ квадратов собственных чисел оператора h_f является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора $f^{\times}f : U \to U$.

Доказательство. Согласно сл. 15.1 на стр. 227 в эрмитовом пространстве U имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов $u_1, \dots, u_n$ самосопряжённого линейного оператора $f^{\times}f : U \to U$, причём по лем. 15.2 все собственные значения этого оператора неотрицательны, т. е. $f^{\times}fu_i = \alpha_i^2 u_i$ для некоторых вещественных $\alpha_i \geqslant 0$. Перенумеруем базис так, чтобы $\alpha_i \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\alpha_i = 0$ при $i > r$. Тогда, как мы видели в доказательстве лем. 15.2, все векторы u_i с $i > r$ лежат в ядре отображения f. Напротив, при $1 \leqslant i, j \leqslant r$ равенства

$$(fu_i, fu_j) = (f^{\times}fu_i, u_j) = \alpha_i^2\,(u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы $w_i = fu_i/\alpha_i$ образуют в пространстве W ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как $f(u_j) = 0$ при $j > r$, для любого $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $f(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$, т. е. векторы w_i с $1 \leqslant i \leqslant r$ составляют ортонормальный базис в $\operatorname{im} f$, а векторы u_i с $1 \leqslant i \leqslant r$ — ортонормальный базис в ортогональном дополнении V к ядру $\ker f$. Оператор f является композицией изометрического изоморфизма $g_f : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$, $u_i \mapsto w_i$, диагонального оператора $h_f : V \to V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и ортогональной проекции $\pi_f : U \twoheadrightarrow V$ вдоль $\ker f$.

Пусть имеется какое-либо ещё разложение $f = gh\pi_f$, где $\pi_f : U \twoheadrightarrow V$ — ортогональная проекция вдоль $\ker f$. Из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство $V = (\ker f)^{\perp}$ является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств V_i оператора $f^{\times}f$, отвечающих ненулевым собственным значениям α_i^2 этого оператора, и композиция $gh : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ совпадает с ограничением $f|_V$. Поскольку $h^{\times} = h$ как операторы $V \to V$, а $g^{\times} = g^{-1}$ как унитарные операторы $\operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} V$, мы заключаем, что ограничение $f^{\times}f|_V = h^2$. Так как оператор h^2 диагонализуется в том же самом базисе, что и h, мы заключаем, что самосопряжённый оператор h действует на каждом подпространстве V_i умножением на α_i. Тем самым, h определяется по f однозначно. А тогда и $g = h^{-1} \circ f|_V : V \to W$ определяется однозначно. $\square$

Упражнение 15.8. Убедитесь, что оператор $f^{\times} : W \to V$ действует на построенные в доказательстве теор. 15.2 векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $f^{\times}f$ и $ff^{\times}$ одинаковы.

[1] Т. е. сохраняющего скалярное произведение: $(g_f u_1, g_f u_2) = (u_1, u_2)$ для всех $u_1, u_2 \in U$.

Определение 15.1 (сингулярные числа и сингулярные направления)
В условиях теор. 15.2 набор из $\dim U$ неотрицательных квадратных корней α_i из собственных значений самосопряжённого оператора $f^\times f : U \to U$ называется *набором сингулярных чисел* линейного отображения $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W. Ровно $\operatorname{rk} f$ из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства[1] оператора $f^\times f$ называются *сингулярными направлениями* отображения f.

Следствие 15.4 (SVD-разложение[2])
Каждая комплексная прямоугольная матрица $F \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ раскладывается в произведение $F = T_m D T_n$, в котором матрицы $T_m \in \mathrm{U}_m$ и $T_n \in \mathrm{U}_n$ унитарны, а $m \times n$-матрица $D = \left(d_{ij}\right)$ диагональна, вещественна и неотрицательна в том смысле, что $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а все $d_{ii} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. При этом ровно $\operatorname{rk} F$ диагональных элементов матрицы D отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать $F = F_{\boldsymbol{mn}}$ как записанную в стандартных базисах $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ эрмитовых пространств $U = \mathbb{C}^n$ и $W = \mathbb{C}^m$ матрицу линейного оператора $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Обозначим через $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ортонормальный базис пространства U, построенный в доказательстве теор. 15.2, а через $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ — любой ортонормальный базис пространства W, содержащий ортонормальный набор векторов $w_i = F(u_i)/\alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, из доказательства теор. 15.2. Оператор $F : u_i \mapsto \alpha_i w_i$ задаётся в базисах $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ диагональной матрицей $D = F_{\boldsymbol{wu}}$, ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ оператора F. Поэтому $F = F_{\boldsymbol{mn}} = C_{\boldsymbol{mw}} F_{\boldsymbol{wu}} C_{\boldsymbol{un}}$, где $C_{\boldsymbol{mw}}$ — унитарная матрица перехода от базиса $\boldsymbol{w}$ к стандартному базису $\boldsymbol{m}$ в $\mathbb{C}^m$, а $C_{\boldsymbol{un}} = C_{\boldsymbol{nu}}^{-1} = C_{\boldsymbol{nu}}^t$ — унитарная матрица перехода от стандартного базиса $\boldsymbol{n}$ в $\mathbb{C}^n$ к базису $\boldsymbol{u}$. Для любого другого разложения $F = T_m A T_n$ с унитарными T_n, T_m и диагональной матрицей A имеем $F^t F = T_n^{-1} A^t A T_n$. Поскольку собственные числа подобных матриц одинаковы, стоящие на диагонали диагональной матрицы $A^t A$ квадраты диагональных элементов матрицы A суть собственные числа матрицы $F^t F$. □

15.5. Полярное разложение. Каждое комплексное число $z \in \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ имеет вид

$$z = \varrho\, e^{i\vartheta}\,, \tag{15-20}$$

где $\varrho = |z|$ вещественно и положительно, а $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \operatorname{Arg} z \in \mathrm{U}_1$. Если воспринимать z как оператор умножения $w \mapsto zw$ на одномерном эрмитовом координатном пространстве $\mathbb{C}$, то формула (15-20) даёт разложение такого оператора в композицию самосопряжённого оператора $w \mapsto \varrho w$ с положительным собственным числом $\varrho = \sqrt{\bar z z} = \sqrt{z^\times z}$ и унитарного оператора $w \mapsto e^{i\vartheta} w$ с собственным числом $e^{i\vartheta} = z\varrho^{-1}$. Непосредственным обобщением этого на старшие размерности является

Следствие 15.5 (полярное разложение)
Каждое биективное линейное преобразование $f \in \mathrm{GL}(W)$ эрмитова пространства W допускает единственное разложение $f = g_f h_f$, в котором оператор $g_f \in \mathrm{U}(W)$ унитарен, а $h_f \in \mathrm{GL}(W)$ самосопряжён и имеет положительные собственные числа, квадраты которых являются собственными числами оператора $f^\times f$.

[1] Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.
[2] «SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

Доказательство. Поскольку оператор f биективен, проекция π_f в его каноническом разложении $f = g_f \circ h_f \circ \pi_f$ из теор. 15.2 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор h_f не имеет ядра. Следовательно все собственные числа оператора h_f строго положительны. □

Замечание 15.2. (явные формулы для g_f и h_f) Компоненты $g_f \in \mathrm{U}(W)$ и h_f полярного разложения $f = g_f \circ h_f$ однозначно находятся из условий $g_f^\times g_f = \mathrm{Id}_W$ и $h_f^\times = h_f$. А именно,

$$f^\times f = h_f^\times g_f^\times g_f h_f = h_f^2\,,$$

откуда $h_f = \sqrt{f^\times f}$ и $g_f = f h_f^{-1}$. Так как $0 \notin \mathrm{Spec}(f^\times f)$, аналитическая вне нуля функция $\sqrt{t}$ алгебраически вычислима на операторе $f^\times f$ при помощи стандартной интерполяционной процедуры[1] из n° 10.3.1 на стр. 144.

Упражнение 15.9. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор f на эрмитовом пространства W также допускает единственное разложение $f = hr$, в котором оператор $r \in \mathrm{U}(W)$, а оператор r самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора $ff^\times$.

Пример 15.5
Найдём полярное разложение $f = gh$ для оператора $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det F = -4$, оператор f невырожден. Самосопряжённый оператор $f^\times f$ имеет матрицу

$$C = F^t F = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след $\mathrm{tr}(C) = 9$, сумма главных 2×2-миноров

$$\det \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3\,, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3\,, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

равна 24, определитель $\det(C) = \det^2 F = 16$ и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9\,t^2 + 24\,t - 16 = (t-1)(t-4)^2\,.$$

Так как оператор $f^\times f$ диагонализуем, он аннулируется многочленом[2] $(t-1)(t-4)$. Следовательно, матрица $H = \sqrt{C}$ самосопряжённого сомножителя h полярного разложения $f = gh$ имеет вид[3] $aE + bC$, где интерполяционный многочлен $p(t) = a + bt$ для вычисления функции $\sqrt{t}$ на

[1] См. опр. 10.3 на стр. 146.
[2] См. предл. 10.6 на стр. 141.
[3] См. n° 10.3.1 на стр. 144.

матрице C однозначно определяется тем, что $p(1) = \sqrt{1} = 1$ и $p(4) = \sqrt{4} = 2$, т. е. $a + b = 1$ и $a + 4\,b = 2$, откуда $a = 2/3$, $b = 1/3$. Таким образом, самосопряжённая матрица $H = \sqrt{C}$ равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а унитарная матрица $G = FH^{-1}$ равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Упражнение 15.10. Убедитесь, что $G^t G = E$.

15.5.1. Экспоненциальное накрытие унитарной группы. Алгебра $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[\![z]\!]$, состоящая из абсолютно сходящихся всюду в $\mathbb{C}$ степенных рядов, алгебраически вычислима[1] на любом линейном операторе $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. В частности, у любого оператора F имеется экспонента $e^F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Если оператор F антисамосопряжён относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}^n$, набор элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ состоит из n двучленов $t - ia$, где $a \in \mathbb{R}$, $ia \in \operatorname{Spec} F$. По предл. 10.9 на стр. 149 $\mathcal{E}\ell(e^F)$ состоит из n двучленов $t - e^{ia}$ биективно соответствующих (с учётом кратностей) собственным числам ia оператора F. Поэтому экспонента $e^F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ является унитарным оператором с собственными числами $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ находящимися в биекции (с учётом кратностей) с собственными числами ia оператора F. Если разложить $\mathbb{C}^n$ в прямую ортогональную сумму одномерных F-инвариантных подпространств, то каждое из них будет и e^F-инвариантно, и каждый собственный вектор оператора F с собственным значением ia будет собственным вектором оператора e^F с собственным значением e^{ia}. Поскольку любой унитарный оператор является прямой ортогональной суммой унитарных операторов, действующих на одномерных подпространствах и имеющих собственные числа вида e^{ia} с $a \in \mathbb{R}$, мы заключаем, что *экспоненциальное отображение*

$$\operatorname{End}_-(\mathbb{C}^n) \twoheadrightarrow \mathrm{U}_n\,, \quad F \mapsto e^F\,, \tag{15-21}$$

сюрьективно. Иначе говоря, каждый унитарный оператор имеет вид $G = e^{iT}$ для некоторого самосопряжённого оператора T. В частности, полярное разложение оператора $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ можно переписать в виде $F = e^{iT}H$, где $T, H \in \operatorname{End}_+(\mathbb{C}^n)$ и все собственные числа оператора H положительны. Однако в отличие от унитарного оператора G в представлении $F = GH$ из сл. 15.5 самосопряжённый оператор T определяется оператором F (или, что то же самое, оператором G) уже не однозначно, поскольку экспоненциальное отображение не инъективно.

Упражнение 15.11. Убедитесь, что $e^{2\pi i \operatorname{Id}} = \operatorname{Id}$.

Предостережение 15.1. Экспоненциальное отображение (15-21) не является гомоморфизмом аддитивной группы в мультипликативную, поскольку $e^{A+B} \neq e^A e^B$ если матрицы A и B не перестановочны. Композиция $e^A e^B$ является экспонентой от бесконечного *ряда Кэмпбела–Хаусдорфа*, составленного из итерированных коммутаторов операторов A и B. Прочитать об этом можно в книге *Серр Ж. П. Алгебры Ли и группы Ли*. М. «Мир» 1969, гл. IV, §§ 7, 8.

[1] См. n° 10.3.1 на стр. 144.

Упр. 15.2. Так как правые части форм. (15-7) на стр. 220 вещественны, $(u_i^\times, u_j) = \overline{(u_j, u_i^\times)} = \delta_{ij}$, что и означает равенство $u_j^{\times\times} = u_j$.

Упр. 15.3. Так как равенство из свойства (2) линейно по u, его достаточно проверить только на базисных векторах $u = u_k^\times$. Сделайте это.

Упр. 15.4. Равенства $(fu_i, w_j) = (u_i, f^\times w_j)$ означают равенство матрицы Грама $G_{f(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}} = f(\boldsymbol{u})^t \cdot \boldsymbol{w}$ наборов векторов $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$ и $\boldsymbol{w}$ и матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u},f^\times(\boldsymbol{w})} = \boldsymbol{u}^t \cdot f^\times(\boldsymbol{w})$ наборов векторов $\boldsymbol{u}$ и $f^x(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\, F_{\boldsymbol{wu}}^\times$.

Упр. 15.6. Ответ: $a(t) \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - (b(t) - 2a'(t)) \cdot \frac{d}{dt} + (c(t) - b'(t) + a''(t))$.

Упр. 15.7. Рассмотрим $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ как вещественное n^2-мерное векторное пространство с базисом E_{ij} и iE_{ij}, где E_{ij} — матрица с единицей в i-той строке j-того столбца и нулями в остальных местах. В координатах (x_{ij}, y_{ij}) относительно этого базиса матричное уравнение $f^t \cdot \overline{f} = E$, задающее унитарные матрицы $(f_{ij}) = (x_{ij}) + i \cdot (y_{ij})$, запишется системой системой квадратичных уравнений $\sum\limits_\nu (x_{\nu i}^2 + y_{\nu i}^2) = 1$ (для каждого $i = 1, \dots n$) и $\sum\limits_\nu (x_{\nu i} x_{\nu j} + y_{\nu i} y_{\nu j}) = \sum\limits_\nu (y_{\nu i} x_{\nu j} - x_{\nu i} y_{\nu j}) = 0$ (для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$). Поэтому множество U_n замкнуто. Складывая все уравнения первого типа, видим, что U_n находятся внутри единичного шара радиуса $\sqrt{n}$ с центром в начале координат, и значит, компактно. Диагональная матрица D с диагональными элементами вида $e^{i\vartheta}$ очевидно соединяется с единичной матрицей гладким путём $\gamma\ :\ [\,0\,1\,] \to \mathrm{U}_n$, образ которого целиком состоит из диагональных матриц того же вида (надо просто согласованно устремить все ϑ к нулю). Поскольку произвольная унитарная матрица f записывается как $f = CDC^{-1}$ для некоторого $C \in \mathrm{U}_n$, путь $t \mapsto C \cdot \gamma(t) \cdot C^{-1}$ будет целиком лежать в U_n и соединять f с E.

Упр. 15.9. Так как оператор $ff^\times$ самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный самосопряжённый оператор h с положительными собственными значениями, квадрат которого равен[1] $ff^\times$. Тогда $f = hr$, где $r = h^{-1}f$ унитарен, поскольку $r^\times r = r^\times h^{-2} f = f^x (ff^\times)^{-1} f = \mathrm{Id}_W$.

[1] Так как h и h^2 диагонализуются в одном базисе, оператор h обязан действовать на каждом собственном подпространстве V_λ оператора h^2 умножением на положительный $\sqrt{\lambda}$.