§8. Определители

8.1. Кососимметричные полинейные формы. Функция $M \times \dots \times M \to K$ от m аргументов из K-модуля M называется *полилинейной формой*[1], если она линейна по каждому своему аргументу при фиксированных остальных, т. е.

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, u, \dots) + \mu\, \omega(\dots, w, \dots)\,, \tag{8-1}$$

где обозначенные многоточиями аргументы во всех трёх членах неизменны. Полилинейная форма называется *кососимметричной*, если она обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают. Каждая полилинейная кососимметричная форма *знакопеременна* в том смысле, что её значение меняет знак при перестановке любых двух аргументов. В самом деле, если форма ω полилинейна и кососимметрична, то для любых $u, w \in M$

$$\begin{aligned}\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) = \\ = \omega(\dots, u, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, w, \dots) = \\ = \omega(\dots, u+w, \dots, u+w, \dots) = 0\,,\end{aligned}$$

где обозначенные многоточиями аргументы во всех членах не меняются.

Упражнение 8.1. Покажите, что если $2 = 1 + 1$ не делит нуль в K, то знакопеременность равносильна кососимметричности.

Полилинейные формы образуют K-модуль относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососимметричные формы составляют в нём подмодуль.

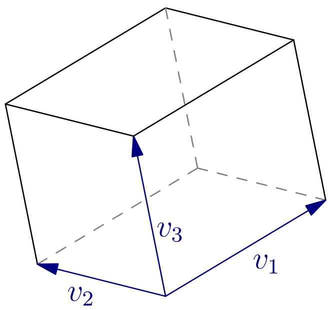

Рис. 8◇1. Параллелепипед.

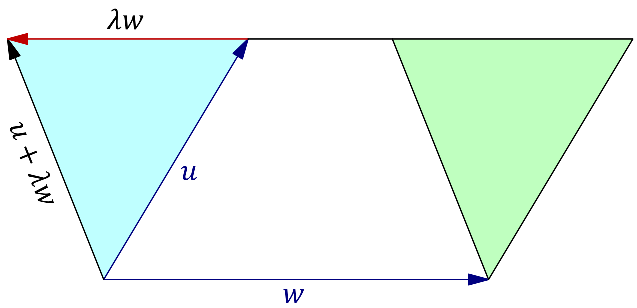

Рис. 8◇2. Параллельный перекос.

Пример 8.1 (форма объёма на векторном пространстве)

Ненулевая функция от n аргументов $\omega : V \times \dots \times V \to \Bbbk$ на n-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется *объёмом ориентированного n-мерного параллелепипеда* или *формой n-мерного объёма*, если её значение не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента, т. е.

$$\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)\,, \tag{8-2}$$

а при умножении любого из аргументов на скаляр её значение умножается на этот скаляр, т. е.

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, v, \dots)\,. \tag{8-3}$$

[1] Или *m-линейной формой* на M, когда важно явно указать количество аргументов.

На геометрическом языке эти свойства означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_n$, как на рис. 8◇1, умножается на λ при умножении любого ребра на λ, и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n-1)$-мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на рис. 8◇2 выше). Каждая форма n-мерного объёма ω кососимметрична и полилинейна. Первое вытекает из того, что форма объёма обращается в нуль, если один из аргументов линейно выражается через остальные. Скажем, если $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, то

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,\, v_2, \dots, v_n) = \\ = \omega(0 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \\ = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0\,.\end{aligned}$$

Равенство $\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda\,\omega(\dots, u, \dots) + \mu\,\omega(\dots, w, \dots)$ тривиальным образом выполнено, когда оба набора аргументов в его правой части линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части (**??**) нулевые, поскольку линейная зависимость над полем означает, что один из векторов линейно выражается через остальные, и по предыдущему форма объёма обращается на таких векторах в нуль. Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого в правой части образуют базис пространства V. Тогда $w = \varrho u + v$, где v является линейной комбинацией остальных $n-1$ аргументов, и левая часть равенства равна

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu\varrho u + \mu v, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)u, \dots) = (\lambda + \mu\varrho)\omega(\dots, u, \dots)\ ,$$

а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu\omega(\dots, \varrho u + v, \dots) = \mu\varrho \cdot \omega(\dots, u, \dots)$, что и доказывает линейность.

Наоборот, любая n-линейная кососимметричная форма на n-мерном векторном пространстве является формой объёма, поскольку условие (8-3) является составной частью линейности, а условие (8-2) вытекает из линейности и кососимметричности: $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \lambda\omega(\dots, w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$.

8.1.1. Ключевое вычисление. Если модуль $N \simeq K^n$ свободен ранга n, и набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ образует базис N над K, то значение произвольной n-линейной кососимметричной формы $\omega : M \times \dots \times M \to K$ на любом наборе векторов $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)\,C$, где в j-том столбце матрицы C стоят координаты вектора v_j в базисе $\boldsymbol{e}$, выражается через значение $\omega(e_1, \dots, e_n)$. В самом деле, поскольку ω линейна по каждому аргументу,

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega\Big(\sum_{i_1} e_{i_1} c_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n} e_{i_n} c_{i_n n}\Big) = \sum_{i_1,\dots,i_n} c_{i_1 1} \cdots c_{i_n n}\,\omega\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right)\,.$$

Так как при совпадении каких-либо двух аргументов форма ω зануляется, в последней сумме отличны от нуля только слагаемые с попарно разными индексами $i_1, \dots, i_n$. Каждый такой набор индексов имеет вид $g(1), \dots, g(n)$, где $g : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ — некоторая биекция. Множество всех таких биекций обозначается S_n и называется *группой перестановок n символов* или *n-той симметрической группой*. Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i-го и j-го элементов.

Упражнение 8.2. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее, чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g, не зависит от способа разложения.

8.1.2. Отступление: знак и длина перестановки. Назовём упорядоченную пару $i < j$ элементов множества $\{1, \dots, n\}$ *инверсной* для перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ упорядоченных пар $i < j$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g.

Упражнение 8.3. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\operatorname{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g. Перестановка g называется *чётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = -1$.

Лемма 8.1
$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ и любой транспозиции σ_{ij}.

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \\ g\sigma_{ij} &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \end{aligned} \tag{8-4}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j, стоящих на i-том и j-том местах перестановки g. В этих двух перестановках пара (i, j), а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. □

Следствие 8.1
Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m.

Доказательство. Тождественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. □

Упражнение 8.4. Убедитесь, что $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$, т. е. отображение $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

Пример 8.2 (правило ниточек)

Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*[1]. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8◇3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[2]. Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

Упражнение 8.5. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$, в которой $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_m$.

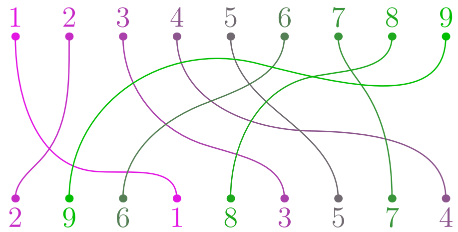

Рис. 8◇3. $\operatorname{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

8.1.3. Определитель матрицы. Продолжим вычисление, начатое в n° 8.1.1 выше. В силу знакопеременности формы ω, для каждой перестановки $g \in S_n$ выполняется равенство

$$\omega(e_{g(1)}, \dots, e_{g(n)}) = \operatorname{sgn}(g)\omega(e_1, \dots, e_n),$$

где знак $\operatorname{sgn}(g) = \pm 1$ перестановки g равен $+1$ для чётных перестановок, и -1 для нечётных. Таким образом, для свободного модуля ранга n с базисом $e_1, \dots, e_n$ значение любой n-линейной кососимметричной формы ω на произвольном наборе векторов $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)\,C$ выражается через её значение на базисе по формуле

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}\,. \tag{8-5}$$

Правая сумма называется *определителем* $n \times n$ матрицы $C = (c_{ij})$ и обозначается

$$\det C \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}\,. \tag{8-6}$$

Таким образом, для вычисления определителя следует всеми возможными способами выбирать n элементов в матрице C так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце был выбран ровно один элемент. Клетки, где находятся выбранные элементы, задают биекцию $g : j \mapsto g(j)$ из множества столбцов в множество строк матрицы C. Каждую выбранную n-ку элементов следует перемножить и умножить на знак перестановки g, которую она задаёт. Полученные таким образом $n!$ произведений складываются.

[1] Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак конкретной перестановки длинного набора чисел — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Однако правило ниточек часто оказывается полезным при анализе абстрактных перестановок.

[2] Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

Пример 8.3
Определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{8-7}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}\,. \end{aligned} \tag{8-8}$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

Пример 8.4 (определитель треугольной матрицы)
Если матрица C верхнетреугольная[1], т. е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$, то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-6) будет произведение диагональных элементов матрицы C, отвечающее тождественной перестановке $g = \mathrm{Id}$. Таким образом, для верхнетреугольной матрицы C определитель $\det C = \prod_i c_{ii}$. В частности, $\det E = 1$.

Предложение 8.1
Для любой квадратной матрицы C выполняется равенство $\det C = \det C^t$.

Доказательство. Суммы (8-6), вычисляющие $\det C$ и $\det C^t$, состоят из одних и тех же произведений всевозможных n-ок элементов матрицы, устанавливающих биекцию $g : j \mapsto g_j$ между номерами столбцов и номерами строк, только в первой из сумм отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком $\mathrm{sgn}(g)$, а во второй — со знаком $\mathrm{sgn}(g^{-1})$. Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если $g = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$, где σ_i — транспозиции, то $g^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$ в силу равенства $\sigma_i\sigma_i = \mathrm{Id}$. □

Предложение 8.2
Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-6): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если i-й столбец матрицы C совпадает с j-м, то в сумме (8-6) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, где σ_{ij} меняет местами i и j, а все остальные номера оставляет на месте. В самом деле, $\mathrm{sgn}(h) = -\mathrm{sgn}(g)$, а отвечающие h и g произведения матричных элементов совпадают: $\cdots c_{h(i)i} \cdots c_{h(j)j} \cdots = \cdots c_{g(j)i} \cdots c_{g(i)j} \cdots = = \cdots c_{g(j)j} \cdots c_{g(i)i} \cdots = \cdots c_{g(i)i} \cdots c_{g(j)j} \cdots$. □

Следствие 8.2
Определитель $n \times n$-матрицы является n-линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

[1] См. прим. 7.8 на стр. 104.

Следствие 8.3
Модуль n-линейных кососимметричных форм на свободном модуле ранга n с базисом $e_1, \dots, e_n$ свободен и имеет ранг 1. Базисным элементом этого модуля является форма $\omega_{\boldsymbol{e}}$, принимающая на векторах $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ значение $\omega_{\boldsymbol{e}}(v_1, \dots, v_n) = \det C$. Координатой произвольной n-линейной кососимметричной формы ω в этом базисе является число $\omega(e_1, \dots, e_n)$.

Доказательство. Форма $\omega_{\boldsymbol{e}}$ полилинейна и кососимметрична по предл. 8.2. Она не является тождественно нулевой, поскольку $\omega_{\boldsymbol{e}}(e_1, \dots, e_n) = \det E = 1$, как мы видели в прим. 8.4. По форм. (8-5) на стр. 109 для любой полилинейной кососимметричной формы ω и любого набора векторов $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ выполняется равенство

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det C = \omega(e_1, \dots, e_n)\omega_{\boldsymbol{e}}(v_1, \dots, v_n)\,,$$

означающее, что ω пропорциональна $\omega_{\boldsymbol{e}}$ и коэффициент пропорциональности определяется формой ω однозначно. □

8.1.4. Определитель линейного эндоморфизма. Мы по-прежнему обозначаем через N свободный K-модуль ранга n. Всякое K-линейное отображение $F : N \to N$ задаёт K-линейное отображение модуля n-линейных кососимметричных форм на N в себя, переводящее каждую форму $\omega : N \times \dots \times N \to K$ в форму $\omega_F : N \times \dots \times N \to K$, значения которой вычисляются по правилу

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} \omega\left(Fv_1, \dots, Fv_n\right)\,.$$

Упражнение 8.6. Убедитесь, что форма ω_F полилинейна, кососимметрична и линейно зависит от ω.

Упражнение 8.7. Убедитесь, что всякий линейный эндоморфизм K-модуля, порождённого одним элементом, является умножением на константу.

Таким образом, отображение $\omega \mapsto \omega_F$ умножает все n-линейные кососимметричные формы на одно и то же число. Это число обозначается $\det F$ и называется *определителем* линейного эндоморфизма $F : V \to V$. Поскольку для любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в N векторы $(Fe_1, \dots, Fe_n) = (e_1, \dots, e_n)\,F_{\boldsymbol{e}}$, где $F_{\boldsymbol{e}}$ — матрица оператора F в базисе $\boldsymbol{e}$, для базисной формы $\omega = \omega_{\boldsymbol{e}}$, построенной по базису $\boldsymbol{e}$ согласно сл. 8.3, имеем

$$\omega_F(e_1, \dots, e_n) = \omega_{\boldsymbol{e}}(Fe_1,\, Fe_2, \dots, Fe_n) = \omega_{\boldsymbol{e}}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det F_{\boldsymbol{e}}\,,$$

откуда $\det(F) = \det F_{\boldsymbol{e}}$. Таким образом, определитель линейного эндоморфизма равен определителю его матрицы в любом базисе и не зависит от выбора базиса.

Поскольку при последовательном выполнении операторов $G : M \to M$ и $F : M \to M$ преобразование $\omega \mapsto \omega_G$ умножает каждую форму ω на $\det G$, а преобразование $\omega \mapsto \omega_F$ умножает каждую форму ω на $\det F$, мы заключаем, что преобразование $\omega \mapsto \omega_{FG}$ умножает каждую форму ω на произведение $\det(F) \cdot \det(G)$. Таким образом, для любых двух линейных эндоморфизмов $F, G : M \to M$ выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F)\det(G) \tag{8-9}$$

В частности, $\det(FG) = \det(GF)$. Применяя это равенство к линейным эндоморфизмам

$$A : x \mapsto Ax \quad \text{и} \quad B : x \mapsto Bx$$

координатного модуля K^n, заданным в его стандартном базисе любыми матрицами A и B, мы заключаем, что для квадратных матриц с элементами из произвольного коммутативного кольца K выполняется равенство

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,. \tag{8-10}$$

В частности, беря в качестве K кольцо многочленов $\mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ с целыми коэффициентами от $2n^2$ независимых переменных a_{ij} и b_{ij}, а в качестве $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ матрицы, элементами которых являются эти переменные, мы заключаем, что равенство (8-10) представляет собою *формальное тождество* на независимые коммутирующие переменные a_{ij} и b_{ij}.

Следствие 8.4
Если квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ обратима, то её определитель $\det A$ обратим в K.

Доказательство. Вычисляя определители обеих частей равенства $A \cdot A^{-1} = E$, получаем $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1$. □

8.2. Присоединённая матрица и правила Крамера. Для векторов $v_1, \dots, v_n$ из координатного модуля K^n обозначим через $\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения как записываются координаты — по строкам или по столбцам.

Предложение 8.3 (первое правило Крамера)
Если векторы $v_1, \dots, v_n$ образуют базис в K^n, то $\det(v_1, \dots, v_n)$ обратим в K и i-тая координата произвольного вектора $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1},\, w,\, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(v_1, \dots, v_n)}\,. \tag{8-11}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ образуют базис, то матрица их координат обратима по предл. 7.1 на стр. 96, а значит, $\det(v_1, \dots, v_n)$ обратим по сл. 8.4. Применяя к обеим частям равенства $w = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ линейную функцию

$$K^n \to K\,, \quad u \mapsto \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n\right)\,,$$

получаем равенство $\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = x_i \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$. □

8.2.1. Присоединённая матрица. Для квадратной матрицы $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ обозначим через C_{ij} подматрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из C удалением i-й строки и j-го столбца. Число $(-1)^{i+j}\det C_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* к элементу c_{ij} матрицы C. Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^\vee = \left(c^\vee_{ij}\right)\,, \quad \text{где} \quad c^\vee_{ij} = (-1)^{i+j}\det C_{ji}\,,$$

называется *присоединённой*[1] к матрице C.

Предложение 8.4 (формула для обратной матрицы)
Если матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ обратима, то $C^{-1} = \frac{1}{\det C}\,C^\vee$.

[1] По-английски *adjunct*.

Доказательство. Если матрица C обратима, то её столбцы $v_1, \dots , v_n$ образуют базис $\boldsymbol{v}$ координатного модуля K^n. Стандартный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots , e_n)$ в K^n выражается через него по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}\, C^{-1}$. Таким образом, i-й элемент j-го столбца матрицы C^{-1} является коэффициентом при v_i в разложении вектора e_j по базису $\boldsymbol{v}$. По правилу Крамера он равен

$$\frac{\det\left(v_1, \dots , v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots , v_n\right)}{\det C}\,.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i-м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j-й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк:

$$\det\left(v_1, \dots , v_{i-1},\, e_j,\, v_{i+1}, \dots , v_n\right) = (-1)^{i-1}\det\left(e_j, v_1, \dots , v_{i-1},\, v_{i+1}, \dots , v_n\right) =$$
$$= (-1)^{i+j-2}\det\begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся удалением j-й строки и i-го столбца из матрицы C. Тем самым, $\det\left(v_1, \dots , v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots , v_n\right) = c_{ij}^{\vee}$. □

Пример 8.5

Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Лемма 8.2

Покажите, что над бесконечным полем $\Bbbk$ многочлен $f(x_1, \dots , x_m) \in \Bbbk[x_1, \dots , x_m]$ принимает нулевое значение в каждой точке аффинного координатного пространства $\Bbbk^m$ если и только если все его коэффициенты нулевые.

Доказательство. Индукция по числу переменных m. При $m = 1$ ненулевой многочлен $f(x_1) \in \Bbbk[x_1]$ имеет не более $\deg f$ корней, а значит, не может обращаться в нуль во всех точках бесконечной прямой $\Bbbk^1$. При $m > 1$ перепишем f как многочлен от x_m с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, \dots , x_{m-1}]$:

$$f(x_1, \dots , x_m) = \sum_{k\geqslant 0} f_k(x_1, \dots , x_{m-1}) \cdot x_m^k\,,$$

Так как для любой точки $p = (p_1, \dots, p_{m-1}) \in \Bbbk^{m-1}$ многочлен от одной переменной

$$f_p(x_m) = \sum_{k \geqslant 0} f_k(p) \cdot x_m^k \in \Bbbk[x_m]\,,$$

полученный подстановкой координат точки p во все коэффициенты предыдущей формулы, тождественно зануляется на всей прямой, по уже доказанному все $f_k(p) = 0$ для всех $p \in \Bbbk^{m-1}$. По индукции, все коэффициенты всех многочленов $f_k(x_1, \dots, x_{m-1})$ нулевые. Значит и у f все коэффициенты нулевые. □

Теорема 8.1

Обозначим через $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ кольцо многочленов от n^2 переменных c_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, а через $C = \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ матрицу, элементами которой являются эти переменные. В кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ матриц с элементами из K выполняется равенство

$$C \cdot C^{\vee} = C \cdot C^{\vee} = \det(C) \cdot E\,. \tag{8-12}$$

Доказательство. Приравнивая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-12), мы получаем набор из n^2 равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных c_{ij}. Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из n^2 численных значений $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Более того, поскольку многочлены являются непрерывными функциями $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, численные равенства достаточно проверять не всюду, а на некотором всюду плотном подмножестве в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Упражнение 8.8 (по анализу). Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ множество $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^m$.

Таким образом, достаточно проверить равенство (8-12) для всех числовых матриц $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеющих $\det C \neq 0$. Столбцы такой матрицы линейно независимы, так как если бы один из них линейно выражался через другие, определитель был бы нулевым. Таким образом, столбцы матрицы C образуют базис векторного пространства $\mathbb{R}^n$, а значит, матрица C обратима и для неё выполняется предл. 8.4, а с ним и формула (8-12). □

Следствие 8.5

Квадратная матрица C с элементами в произвольном коммутативном кольце K с единицей обратима если и только если $\det C$ обратим в K, и в этом случае обратная матрица вычисляется согласно предыдущему предл. 8.4. □

Следствие 8.6

Векторы $v_1, \dots, v_n \in K^n$ тогда и только тогда образуют базис в K^n, когда $\det(v_1, \dots, v_n)$ обратим в K, и в этом случае коэффициенты линейного выражения произвольного вектора через этот базис находятся по правилу Крамера из предл. 8.3 на стр. 112. □

Предложение 8.5 (разложение определителя по i-й строке или i-у столбцу)

В кольце $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki}\,.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием (i,i)-тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-12). □

Пример 8.6
Раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}\left(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}\right) - c_{21}\left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}\right) + c_{31}\left(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}\right) .$$

что согласуется с прямым вычислением из прим. 8.3.

Пример 8.7 (однородные системы из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных)
Пространство решений системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8-13}$$

на $n+1$ неизвестных $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства $\Bbbk^{n+1}$ над произвольным полем $\Bbbk$, является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве $\Bbbk^{n+1^*}$. Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-13) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \overset{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8-14}$$

определитель $n \times n$ матрицы, получающихся из A выкидыванием i-го столбца. Покажем, что уравнения (8-13) линейно независимы если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в этом случае вектор a порождает одномерное пространство решений системы (8-13).

Для этого допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i-той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (8-13). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-14) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ линейно независимы в $\Bbbk^{n+1*}$, то по лемме о замене[1] их можно дополнить до базиса в $\Bbbk^{n+1*}$ одним из стандартных базисных ковекторов e_i^*. Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в строки которой записаны координаты базисных ковекторов $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен $(-1)^i A_i$, откуда $A_i \neq 0$.

8.3. Тождество Гамильнотна – Кэли. Для любого коммутативного кольца K с единицей кольцо $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\mathrm{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t, можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2+2t & t^3-1 \\ 2t+3 & t^3+t-1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8.1

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \overset{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)^k \sigma_k(A)$.

Упражнение 8.9. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме определителей всех таких $k \times k$ подматриц матрицы A, главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A. В частности, $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$.

Теорема 8.2 (тождество Гамильтона – Кэли)

Пусть, как и выше, $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ является кольцом многочленов от n^2 переменных a_{ij}. Тогда в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ для матрицы $A = (a_{ij})$ выполняется равенство $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Подставляя в форм. (8-12) на стр. 114 вместо C матрицу $tE - A$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, заключаем, что в кольце $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee,$$

где $(tE - A)^\vee$ — присоединённая[2] к $(tE - A)$ матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$:

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A)\, t^{n-1} \cdot E + \cdots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A)\left(t^m \cdot A_m^\vee + \cdots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee\right),$$

где $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots, A_m^\vee \in \mathrm{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A) \cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. □

[1]См. лем. 6.2 на стр. 88.

[2]См. n° 8.2.1 на стр. 112.

8.4. Грассмановы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\Bbbk\langle\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\rangle$ *грассмановых многочленов* от переменных $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные ξ_i не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i,j \quad \xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i\wedge\xi_i = 0\,, \tag{8-15}$$

где символ «$\wedge$» обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, всякий ненулевой грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Иначе говоря, для каждого строго возрастающего набора $I=(i_1,i_2,\dots,i_m)$ номеров $i_1<i_2<\dots<i_m$ имеется грассманов моном

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\,, \tag{8-16}$$

который при перестановке $g\in S_m$ переменных $\xi_{i_1},\ \xi_{i_2},\ \dots,\ \xi_{i_m}$ меняет знак по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}}\wedge\xi_{i_{g(2)}}\wedge\dots\wedge\xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g)\cdot\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\,. \tag{8-17}$$

Мономы (8-16), занумерованные всевозможными подмножествами $I\subset\{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}$, составляют базис алгебры $\Bbbk\langle\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\rangle$ как векторного пространства над $\Bbbk$ и перемножаются по правилу

$$\xi_I\wedge\xi_J = \begin{cases}\operatorname{sgn}(I,J)\cdot\xi_{I\sqcup J} & \text{если } I\cap J=\varnothing\\ 0 & \text{если } I\cap J\neq\varnothing\end{cases} \tag{8-18}$$

где $\operatorname{sgn}(I,J)=\pm1$ обозначает знак *тасующей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров $i_1,i_2,\dots,i_m,\,j_1,j_2,\dots,j_k$, в котором $i_1<i_2<\dots<i_m$ и $j_1<j_2<\dots<j_k$. Если наборы $I=(i_1,i_2,\dots,i_m)$ и $J=\{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}\smallsetminus I$ дополнительны друг к другу, то согласно упр. 8.5 на стр. 109 этот знак $\operatorname{sgn}(I,J)=(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+m(m+1)/2}$.

Единственный моном старшей степени $\xi_{\text{top}}\overset{\text{def}}{=}\xi_1\wedge\xi_2\wedge\dots\wedge\xi_n$ аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (8-16), отвечающие всевозможным k-элементным подмножествам I. Размерность всей грассмановой алгебры $\dim\Bbbk\langle\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\rangle=2^n$.

Два грассмановых монома степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$\begin{aligned}\left(\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\right)\wedge\left(\xi_{j_1}\wedge\xi_{j_2}\wedge\dots\wedge\xi_{j_k}\right) &=\\ =(-1)^{km}\left(\xi_{j_1}\wedge\xi_{j_2}\wedge\dots\wedge\xi_{j_k}\right)&\wedge\left(\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\right),\end{aligned}$$

ибо при переносе каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i происходит m транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов η и ω

$$\eta\wedge\omega=(-1)^{\deg\eta\deg\omega}\omega\wedge\eta\,. \tag{8-19}$$

[1]Если $\operatorname{char}\Bbbk\neq2$ соотношения $\xi_i\wedge\xi_i=0$ вытекают из соотношений $\xi_i\wedge\xi_j=-\xi_j\wedge\xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\operatorname{char}\Bbbk=2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i\wedge\xi_i=0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 8.10. Опишите *центр*[1] грассмановой алгебры.

8.4.1. Грассманова алгебра векторного пространства. Если в векторном пространстве V выбран базис $e_1, \dots, e_n$, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle$ от базисных векторов пространства V обозначается ΛV и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства V. Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством V и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени k является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ из k произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени k через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры ΛV в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V\,,$$

где $\Lambda^0 V \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

8.4.2. Линейные замены переменных. Если векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ по формуле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\,C$, где $C = \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(\Bbbk)$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m} = \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\Big) =$$
$$= \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g\in S_m} \mathrm{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \dots c_{i_{g(n)} j_n} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,,$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ из m возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрице выражающей векторы $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$.

В частности, если наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства V, то базисные грассмановы мономы e_J пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы f_I при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ-тый минор $\left(c_{IJ}\right)$ матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$, выражающей $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{f}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{\boldsymbol{fe}}$ и называется m-той *внешней степенью* матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$.

8.5. Соотношения Лапласа. Для набора возрастающих чисел $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ положим $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$, $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$ и условимся обозначать через

$$\hat{J} = \left(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$$

[1] Т. е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

дополнительный к J набор из $\deg \hat{J} = n - m$ возрастающих номеров.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, столбцы которой обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и будем воспринимать как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$. Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису $e_1, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$. Для любых двух мультииндексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ грассмановы мономы $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_m}$ и $\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{\hat{\imath}_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\hat{\imath}_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$ и перемножаются по форм. (8-18) на стр. 117, которая с учётом упр. 8.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J|+\frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{8-20}$$

Выражая мономы α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (8-20) через базисные мономы e_K, получаем

$$\Big(\sum_K e_K a_{KJ}\Big) \wedge \Big(\sum_L e_L a_{L\hat{I}}\Big) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

где K пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Так как правая часть (8-20) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{8-21}$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (8-21) даёт формулу для вычисления определителя[1]

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \tag{8-22}$$

через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор a_{KJ}. Произведение $(-1)^{|K|+|J|} a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ}$.

Упражнение 8.11. Для любых матриц $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ покажите, что $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

При $I \neq J$ соотношение (8-21) имеет вид $\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{IK} = 0$ и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части формулы (8-22) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{IK}$ к минорам a_{IK}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E \tag{8-23}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n-мерного параллелепипеда через объёмы его m-мерных и $(n - m)$-мерных граней.

на матрицы размера $\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$, в котором (IJ)-тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|}a_{\hat{J}\hat{I}}\,.$$

Упражнение 8.12. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK}\hat{a}_{IK} = \begin{cases}\det A & \text{при } I = J\\ 0 & \text{при } I \neq J\end{cases} \tag{8-24}$$

Пример 8.8 (соотношения Плюккера)
Рассмотрим 2×4 матрицу $A = \left(a_{ij}\right)\in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ и обозначим через A_{ij} её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Шесть чисел A_{ij} не могут принимать произвольные значения. Они связаны квадратичным *соотношением Плюккера*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0\,, \tag{8-25}$$

которое получается при раскрытии нулевого определителя 4×4 матрицы $\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}$ по первым двум строкам.

Упражнение 8.13. Убедитесь в этом и для любых шести чисел A_{ij}, удовлетворяющих соотношению (8-25), явно предъявите 2×4 матрицу A с 2×2 минорами A_{ij}.

Пример 8.9 (определитель пучка матриц)
Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB). Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид t_0A+t_1B, где $t_0, t_1 \in \Bbbk$, а её определитель $\det(t_0A+t_1B)$ является однородным многочленом степени n от t_0, t_1. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ}\hat{b}_{IJ}\,, \tag{8-26}$$

где суммирование идёт по всем k-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Для этого обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ столбцы матриц A и B, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1)\wedge(t_0a_2 + t_1b_2)\wedge\ \dots\ \wedge(t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B)\, e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_n\,.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобках. Если обозначить номера этих k скобок через $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}a_I\wedge b_{\hat{I}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\Big(\sum_J e_Ja_{JI}\Big)\wedge\Big(\sum_K e_Kb_{K\hat{I}}\Big) =$$
$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\sum_{JK} e_J\wedge e_K\cdot a_{JI}b_{K\hat{I}} = e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_n\cdot\sum_J(-1)^{|I|+|J|}a_{JI}b_{\hat{J}\hat{I}}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0 A + t_1 B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (8-26). В обозначениях из (8-23) её можно переписать в виде

$$\det(t_0 A + t_1 B) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t\right) t_0^k t_1^{n-k}\,, \tag{8-27}$$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 8.1. В силу знакопеременности $\omega(\dots, u, \dots, u, \dots) = -\omega(\dots, u, \dots, u, \dots)$, откуда $2\omega(\dots, u, \dots, u, \dots) = 0$, что возможно только если $\omega(\dots, u, \dots, u, \dots) = 0$.

Упр. 8.2. Индукция по n. Каждая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ, переставляющей между собою элементы n и g_n множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n.

Упр. 8.3. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.

Упр. 8.5. Если все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, выходящие из элементов i и j пересекаются между собою нечётное число раз если и только если (i, j) инверсна[1]. Знак тасующей перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где *вес* $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu} i_\nu$. Действительно, нити, выходящие из чисел $i_1, \dots, i_k$ верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1$, $i_2 - 2$, …, $i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 8.7. Пусть модуль M порождается вектором e и $F : M \to M$ переводит эту образующую в $F(e) = \lambda e$, где $\lambda \in K$. Тогда для любого вектора $v = xe$ имеем $F(xe) = x\,F(e) = \lambda x e = \lambda v$.

Упр. 8.8. Всюду плотность множества $\mathcal{D}(f)$ означает, что в любой ε-окрестности[2] каждой точки $p \in \mathbb{R}^m$ найдётся точка $r \neq p$, в которой $f(r) \neq 0$. Так как многочлен f ненулевой, имеется точка $q \in \mathbb{R}^m$ с $f(q) \neq 0$. Ограничение f на прямую (pq), будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.

Упр. 8.10. При чётном n центр алгебры $\Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 8.11. Разложите определитель по первым n столбцам.

Упр. 8.12. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 8.13. Если $A_{12} \neq 0$, то можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно квадратичному соотношению Плюккера[3].

[1] В действительности картинку всегда можно нарисовать так, чтобы в этом случае была ровно одна точка пересечения.

[2] Под ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}^m$ мы понимаем m-мерный куб с центром в точке p и стороной 2ε.

[3] См. формулу (8-25) на стр. 120.