§4. Рациональные функции и степенные ряды

В этом параграфе мы продолжаем обозначать через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через $\Bbbk$ — произвольное поле.

4.1. Кольца частных. Конструкция, изготавливающая поле $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$ как множество дробей с целым числителем и целым ненулевым знаменателем[1], имеет смысл в любом коммутативном кольце K с единицей. Будем называть подмножество $S \subset K$ *мультипликативным*, если

$$1 \in S\,, \quad 0 \notin S \quad \text{и} \quad st \in S \text{ для любых } s,t \in S.$$

Например, если элемент $q \in K$ не является нильпотентным, то множество всех его целых неотрицательных степеней q^k мультипликативно[2]. Множество $K^\circ \subset K$, состоящее из всех ненулевых элементов, которые не являются делителями нуля, также мультипликативно. В частности, множество всех ненулевых элементов любого целостного кольца мультипликативно. Свяжем с каждым мультипликативным подмножеством $S \subset K$ наименьшее отношение эквивалентности $\underset{S}{\sim}$ на множестве упорядоченных пар $K \times S$, содержащее все эквивалентности вида $(a,t) \sim (as,ts)$ с произвольными $s \in S$. Будем называть полученные классы эквивалентности *дробями со знаменателями из* S и обозначать a/s. Множество всех дробей со знаменателями в S обозначим KS^{-1} или $K[S^{-1}]$ и назовём *кольцом частных* (или *локализацией*) кольца K со знаменателями в S.

Лемма 4.1

$a/r = b/t$ в $KS^{-1} \iff \exists\, s \in S\,:\, ats = brs$ в K.

Доказательство. Будем писать $(a,r) \approx (b,t)$, если $ats = brs$ для некоторого $s \in S$. Двушаговая цепочка отождествлений: $(a,r) \sim (ats,rts) = (brs,rts) \sim (b,t)$ показывает, что отношение $\approx$ содержится в отношении $\underset{S}{\sim}$. Остаётся проверить, что отношение $\approx$ является отношением эквивалентности — тогда оно совпадёт с $\underset{S}{\sim}$ в виду минимальности последнего. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $(a,r) \approx (b,t)$ и $(b,t) \approx (c,u)$, т. е. существуют такие $s_1, s_2 \in S$, что $ats_1 = brs_1$ и $bus_2 = cts_2$. Тогда

$$au(ts_1s_2) = brus_1s_2 = cr(ts_1s_2)\,,$$

т. е. $(a,r) \approx (c,u)$. □

Лемма 4.2

Операции $\frac{a}{r} + \frac{b}{s} \overset{\text{def}}{=} \frac{as+br}{rs}$ и $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} \overset{\text{def}}{=} \frac{ab}{rs}$ корректно задают на KS^{-1} структуру коммутативного кольца с единицей $1/1$ и нулём $0/1$.

Доказательство. Поскольку всякое отношение $\underset{S}{\sim}$ представляет собой одно- или двушаговую цепочку элементарных отождествлений $(a,r) \sim (au,ru)$, где $u \in S$, достаточно проверить, что результаты операций не меняются при замене $\frac{a}{r}$ на $\frac{au}{ru}$, а $\frac{b}{s}$ — на $\frac{bw}{sw}$, где $u,w \in S$:

$$\frac{au}{ru} + \frac{bw}{sw} = \frac{ausw + bwru}{rusw} = \frac{(as+br)\cdot wu}{rs\cdot wu} = \frac{as+br}{rs}$$
$$\frac{au}{ru} \cdot \frac{bw}{sw} = \frac{aubw}{rusw} = \frac{(ab)\cdot wu}{rs\cdot wu} = \frac{ab}{rs}\,.$$

[1] См. прим. 1.5 на стр. 13 и прим. 2.2 на стр. 21.

[2] Мы по определению полагаем $q^0 = 1$.

Проверку выполнения в KS^{-1} всех аксиом коммутативного кольца с единицей мы оставляем читателю в качестве упражнения. □

Теорема 4.1

Отображение $\iota_S : K \to KS^{-1}$, переводящее $a \in K$ в дробь $a/1$, является гомоморфизмом колец с ядром $\ker \iota_S = \{a \in K \mid \exists\, s \in S : as = 0\}$. Все элементы $\iota_S(s)$ с $s \in S$ обратимы в KS^{-1}. Для любого гомоморфизма $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, переводящего все $s \in S$ в обратимые элементы кольца R, существует единственный такой гомоморфизм колец $\varphi_S : KS^{-1} \to R$, что $\varphi = \varphi_S \circ \iota_S$.

Доказательство. Очевидно, что ι_S является гомоморфизмом. Дробь $\iota_S(a) = a/1$ равна $0/1$ если и только если найдётся такой $s \in S$, что $a \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot 1 \cdot s = 0$. Обратной к дроби $\iota_S(s) = s/1$ является дробь $1/s$. Остаётся доказать последнее утверждение. Для продолжения гомоморфизма $\varphi : K \to R$ до гомоморфизма $\varphi_S : KS^{-1} \to R$ нет иного выбора как положить $\varphi_S(1/s) = 1/\varphi(s)$, так как в кольце R должны выполняться равенства $\varphi_S(1/s) \cdot \varphi_S(s) = \varphi_S\big(s \cdot (1/s)\big) = \varphi(1) = 1$. Следовательно, искомое продолжение обязано задаваться формулой $\varphi_S(a/r) \overset{\text{def}}{=} \varphi(a)/\varphi(r)$. Она корректна, поскольку при замене $\frac{a}{r}$ на $\frac{as}{rs}$ с $s \in S$ имеем $\varphi_S\left(\frac{as}{rs}\right) = \frac{\varphi(as)}{\varphi(rs)} = \frac{\varphi(a)\,\varphi(s)}{\varphi(r)\,\varphi(s)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(r)}$. Проверка того, что построенное отображение φ_S перестановочно со сложением и умножением, столь же бесхитростна, и мы оставляем её читателю. □

Замечание 4.1. Кольцо KS^{-1} и гомоморфизм $\iota_S : K \to KS^{-1}$ однозначно определяются последним свойством из теор. 4.1. В самом деле, пусть гомоморфизм $\iota' : K \to F$ делает все элементы из S обратимыми в F и обладает универсальным свойством из теор. 4.1, т. е. для любого гомоморфизма $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, делающего все элементы из S обратимыми в R, существует единственный такой гомоморфизм колец $\varphi'_S : F \to R$, что $\varphi = \varphi'_S \circ \iota'$. Тогда существует единственный изоморфизм колец $\psi : KS^{-1} \xrightarrow{\sim} F$, превращающий ι_S в ι' в том смысле, что $\iota' = \psi \circ \iota_S$. Действительно, в силу универсальности гомоморфизма ι_S гомоморфизм ι' единственным образом представляется в виде $\iota' = \psi \circ \iota_S$, а в силу универсальности гомоморфизма ι' гомоморфизм ι_S точно так же единственным образом представляется в виде $\iota_S = \psi' \circ \iota'$. Композиция $\psi' \circ \psi : KS^{-1} \to KS^{-1}$ доставляет разложение самого гомоморфизма $\iota_S : K \to KS^{-1}$ в композицию $\iota_S = (\psi' \circ \psi) \circ \iota_S$. Но такое же разложение можно осуществить при помощи тождественного изоморфизма: $\iota_S = \mathrm{Id}_{KS^{-1}} \circ \iota_S$. Из единственности разложения вытекает равенство $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{KS^{-1}}$. По той же причине $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_F$, т. е. ψ' и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Замечание 4.2. Если в определении мультипликативной системы отбросить требование $0 \notin S$, то всё сказанное выше не утратит формального смысла: эквивалентность $\underset{S}{\sim}$ и кольцо KS^{-1} будут по-прежнему определены, а лем. 4.1, лем. 4.2, теор. 4.1 и их доказательства останутся в силе. Однако, если $0 \in S$, кольцо KS^{-1} получится нулевым: любая дробь $a/s = (a \cdot 0)/(s \cdot 0) = 0/0 = (0 \cdot 1)/(0 \cdot 1) = 0/1$ эквивалентна нулю.

Пример 4.1 (поле частных целостного кольца)

Если кольцо K не имеет делителей нуля, его ненулевые элементы образуют мультипликативную систему. Кольцо частных со знаменателями в этой системе является полем и называется *полем частных* целостного кольца K и обозначается Q_K. Гомоморфизм $\iota : K \hookrightarrow Q_K$, $a \mapsto a/1$

в этом случае инъективен, и любой гомоморфизм $\varphi : K \to R$ в целостное кольцо R, переводящий все ненулевые элементы из K в обратимые элементы кольца R, единственным способом продолжается до вложения поля частных $\widetilde{\varphi} : Q_K \hookrightarrow R$.

Пример 4.2 (поле $\mathbb{Q}$)
Полем частных целостного кольца $\mathbb{Z}$ является поле рациональных чисел $\mathbb{Q} = Q_{\mathbb{Z}}$, которое канонически вкладывается в любое поле характеристики нуль в качестве простого подполя[1].

Пример 4.3 (поле рядов Лорана)
Поле частных кольца формальных степенных рядов $\Bbbk[\![x]\!]$ с коэффициентами в произвольном поле $\Bbbk$ называется полем *рядов Лорана* и обозначается $\Bbbk((x)) \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\Bbbk[\![x]\!]}$. Название «ряд Лорана» объясняется тем, что каждый элемент $f \in \Bbbk((x))$ можно записать как формальный степенной ряд, в котором допускается конечное число отрицательных степеней переменной x

$$f(x) = \sum_{k \geqslant -m} a_k x^k = x^{-m} h(x) , \quad \text{где} \quad h \in \Bbbk[\![x]\!] . \tag{4-1}$$

В самом деле, по определению поля частных $f(x) = p(x) / q(x)$, где $p, q \in \Bbbk[\![x]\!]$ и $q \neq 0$. Если младший член ряда q имеет степень m, то $q = x^m \cdot g(x)$, где $g \in \Bbbk[\![x]\!]$ имеет ненулевой свободный член и, стало быть обратим. Поэтому мы можем записать исходную дробь в виде $f(x) = x^{-m} h(x)$, где $h = p / g \in \Bbbk[\![x]\!]$ является обычным степенным рядом.

4.2. Поле рациональных функций. Поле частных кольца многочленов $\Bbbk[x]$ обозначается через $\Bbbk(x)$ и называется *полем рациональных функций* от одной переменной. Элементы этого поля представляют собой формальные отношения многочленов $f(x) = p(x)/q(x)$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$. Деля числитель и знаменатель на нод(p, q) и на старший коэффициент знаменателя, мы можем записать произвольную дробь в виде отношения двух взаимно простых многочленов с приведённым знаменателем. Мы будем называть такую запись *несократимым представлением* дроби f.

Упражнение 4.1. Покажите, что несократимая запись любой дроби единственна.

Предложение 4.1
Если знаменатель несократимой записи f / g является произведением попарно взаимно простых многочленов $g = g_1 g_2 \ldots g_m$, то дробь f/g единственным образом представляется в виде суммы

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_m}{g_m} , \tag{4-2}$$

в которой $\deg h = \deg f - \deg g$ и $\deg f_i < \deg g_i$.

Доказательство. Поделим f на g с остатком: $f = hg + r$, где $\deg r < \deg g$. Тогда $f/g = h + r/g$. Если $g = g_1 g_2$ и нод$(g_1, g_2) = 1$, то класс $[g_2]_{g_1}$ многочлена g_2 в кольце вычетов $\Bbbk[x]/(g_1)$ обратим и отношение $[r]_{g_1}/[g_2]_{g_1}$ представляется в $\Bbbk[x]/(g_1)$ классом некоторого многочлена f_1 степени $\deg f_1 < \deg g_1$, т. е. в $\Bbbk[x]$ мы имеем равенство $r = f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1$ для некоторого многочлена f_2, и сравнение степеней показывает, что $\deg f_2 < \deg g_2$, коль скоро $\deg f_1 < \deg g_1$. Таким образом, $r / g = f_1 / g_1 + f_2 / g_2$, и с каждой из этих дробей можно и далее проделывать

[1] См. n° 2.8.1 на стр. 32.

аналогичные процедуры до тех пор, пока знаменатели раскладываются в произведение взаимно простых многочленов. Это доказывает существование разложения (4-2). Чтобы доказать его единственность, умножим обе части произвольного разложения (4-2) на g. Получим равенство

$$f = hg + f_1G_1 + f_2G_2 + \dots + f_mG_m\,,$$

где $G_i = g\,/\,g_i = g_1 \dots g_{i-1}g_{i+1} \dots g_m$ и $\deg(f_1G_1 + \dots + f_mG_m) < \deg g$. Тем самым, многочлен h является неполным частным от деления f на g, многочлен $r = f_1G_1 + \dots + f_mG_m$ равен остатку от этого деления, а каждый f_i представляет собою единственный многочлен степени $\deg f_i < \deg g_i$, класс которого в кольце вычетов $\Bbbk[x]\,/\,(g_i)$ равен $[f]_{g_i} \cdot [G_i]_{g_i}^{-1}$. Таким образом, все ингредиенты формулы (4-2) однозначно определяются многочленами f и $g_1, \dots, g_n$. □

Предложение 4.2

Любую дробь вида $f\,/\,g^m$, в которой $\deg f < \deg g^m = m \deg g$, можно единственным образом представить в виде суммы

$$\frac{f}{g^m} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{g^2} + \dots + \frac{f_m}{g^m}\,, \tag{4-3}$$

где каждый числитель f_i имеет степень $\deg f_i < \deg g$.

Доказательство. Представление (4-3) равносильно записи f в виде

$$f = f_1g^{m-1} + f_2g^{m-2} + \dots + f_{m-1}g + f_m\,, \tag{4-4}$$

аналогичном записи целого числа f в g-ичной позиционной системе исчисления: f_m является остатком от деления f на g, f_{m-1} — остатком от деления частного $(f - f_m)\,/\,g$ на g, f_{m-2} — остатком от деления частного $\left(\frac{f-f_m}{g} - f_{m-1}\right)/\,g$ на g и т. д. □

4.2.1. Разложение на простейшие дроби. Из предыдущих двух лемм вытекает, что любая дробь $f\,/\,g \in \Bbbk(x)$ допускает *единственное* представление в виде суммы многочлена степени $\deg f - \deg g$ (неполного частного от деления f на g) и дробей вида $p\,/\,q^m$, где q пробегает множество неприводимых делителей знаменателя, m меняется от 1 до кратности вхождения неприводимого множителя q в разложение многочлена g на неприводимые множители, а каждый числитель p имеет степень $\deg p < \deg q$. Такое представление называется *разложением* дроби $f\,/\,g$ *на простейшие дроби* и часто оказывается полезным при вычислениях с рациональными функциями.

Пример 4.4

Вычислим первообразную[1] и 2013-ю производную от $1/(1+x^2)$. Для этого разложим эту дробь в сумму простейших в поле $\mathbb{C}(x)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1+ix} + \frac{\beta}{1-ix}\,, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$$

Подставляя $x = \pm i$ в равенство $1 = \alpha(1-ix) + \beta(1+ix)$, находим $\alpha = \beta = 1/2$, т. е.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right)\,.$$

[1]Точное алгебраическое определение первообразной от степенного ряда см. в n° 4.4 на стр. 58.

Теперь уже легко вычислить как 2013-ю производную:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2013}\frac{1}{1+x^2}=\frac{2013!}{2}\left(\frac{(-i)^{2013}}{(1+ix)^{2014}}+\frac{i^{2013}}{(1-ix)^{2014}}\right)=$$
$$=\frac{i}{2}\cdot 2013!\cdot\frac{(1+ix)^{2014}-(1-ix)^{2014}}{(1+x^2)^{2014}}=2013!\cdot\sum_{\nu=0}^{1006}\binom{2014}{2\nu+1}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{(1+x^2)^{2014}}\,,$$

так и первообразную:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+ix}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-ix}=\frac{1}{2i}\big(\ln(1+ix)-\ln(1-ix)\big)=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}\,.$$

Подчеркнём, что все проделанные вычисления корректно определены в кольце $\mathbb{C}[\![x]\!]$ и все написанные равенства суть равенства между элементами этого кольца. О том, что такое логарифм и первообразная в кольце $\mathbb{C}[\![x]\!]$, мы ещё подробно поговорим ниже[1].

4.3. Разложение рациональных функций в степенные ряды. В силу универсального свойства поля частных, поле рациональных функций $\Bbbk(x)$ единственным образом вкладывается в поле рядов Лорана $\Bbbk((x))$ так, что при этом многочлены переходят в многочлены. С практической точки зрения это вложение представляет собою разложение рациональных функций f/g в формальные степенные ряды. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, такое разложение можно описать довольно явными формулами. Пусть $\deg f<\deg g$ и знаменатель дроби $f\,/\,g$ имеет вид:

$$g(x)=1+a_1x+a_2x^2+\,\cdots\,+a_nx^n=\prod(1-\alpha_ix)^{m_i}\,,\tag{4-5}$$

где все числа $\alpha_i\in\Bbbk$ попарно различны.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что при $a_n\neq 0$ числа α_i из разложения (4-5) суть корни многочлена $t^n+a_1t^{n-1}+\,\cdots\,+a_{n-1}t+a_n=\prod(t-\alpha_i)^{m_i}$.

По предл. 4.1 и предл. 4.2 функция $f\,/\,g$ является суммой простейших дробей вида

$$\frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_ix)^{k_{ij}}}\tag{4-6}$$

где при каждом i показатели k_{ij} лежат в пределах $1\leqslant k_{ij}\leqslant m_i$, а $\beta_{ij}\in\Bbbk$. Если все кратности $m_i=1$, то константы β_i в получающемся разложении

$$\frac{f(x)}{(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots(1-\alpha_nx)}=\frac{\beta_1}{1-\alpha_1x}+\frac{\beta_2}{1-\alpha_2x}+\,\cdots\,+\frac{\beta_n}{1-\alpha_nx}\tag{4-7}$$

легко указать явно: умножая обе части (4-7) на знаменатель и беря $x=\alpha_i^{-1}$, получаем

$$\beta_i=\frac{f\left(\alpha_i^{-1}\right)}{\prod\limits_{\nu\neq i}\big(1-(\alpha_\nu/\alpha_i)\big)}=\frac{\alpha_i^{n-1}f\left(\alpha_i^{-1}\right)}{\prod\limits_{\nu\neq i}\left(\alpha_i-\alpha_\nu\right)}\,.\tag{4-8}$$

Дробь $f\,/\,g$ в этом случае равна сумме геометрических прогрессий (4-7)

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum\left(\beta_1\alpha_1^k+\beta_2\alpha_2^k+\,\cdots\,+\beta_n\alpha_n^k\right)\cdot x^k\,.$$

[1]См. n° 4.4 на стр. 58. Отметим, что $\frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}=\operatorname{arctg}x$, поскольку $\operatorname{tg}(t)=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{e^{it}+e^{-it}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2it}-1}{e^{2it}+1}$.

Если в простейшей дроби (4-6) показатель $k_{ij} = m > 1$, то она раскладывается в ряд при помощи формулы Ньютона для *бинома с отрицательным показателем*

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+m-1)(k+m-2)\,\cdots\,(k+1)}{(m-1)!} \cdot x^k = \sum_{k\geqslant 0} \binom{k+m-1}{m-1} \cdot x^k\,, \tag{4-9}$$

которая получается $(m-1)$-кратным дифференцированием обеих частей разложения геометрической прогрессии $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \,\dots$.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что $\left(\frac{d}{dx}\right)^m (1-x)^{-1} = m!/\,(1-x)^{m+1}$.

Таким образом, разложение простейшей дроби (4-6) имеет вид

$$\frac{\beta}{(1-\alpha_i x)^m} = \beta \sum_{k\geqslant 0} \alpha_i^k \binom{k+m-1}{m-1} \cdot x^k\,. \tag{4-10}$$

4.3.1. Решение линейных рекуррентных уравнений. Предыдущие вычисления можно использовать для отыскания «формулы k-того члена» последовательности z_k, заданной *линейным рекуррентным уравнением n-того порядка*:

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \,\cdots\, + a_n z_{k-n} = 0\,, \tag{4-11}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ — некоторые фиксированные заданные числа. При $k \geqslant n$ уравнению (4-11) удовлетворяют коэффициенты z_k степенного ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \,\cdots\, + a_n x^k} = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \dots$$

Если подобрать $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ в числителе левой части так, чтобы первые n коэффициентов справа совпадали с начальным куском последовательности (4-11), и разложить полученную рациональную функцию в ряд, то мы получим явные выражения элементов последовательности z_k через k.

Пример 4.5 (числа Фибоначчи)
Найдём явное выражение через k для элементов последовательности

$$z_0 = 0\,, \quad z_1 = 1\,, \quad z_k = z_{k-1} + z_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2\,,$$

решающей рекуррентное уравнение $z_k - z_{k-1} - z_{k-2} = 0$ на коэффициенты ряда

$$\frac{b_0 + b_1 x}{1 - x - x^2} = x + z_2 x^2 + z_3 x^3 + \,\cdots \tag{4-12}$$

(мы подставили в правую часть данные по условию $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$). Умножая обе части (4-12) на общий знаменатель и сравнивая коэффициенты при x^0 и x^1, получаем $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Итак, нас интересуют коэффициенты ряда

$$z(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\beta_+}{1-\alpha_+ x} + \frac{\beta_-}{1-\alpha_- x}\,,$$

где $\alpha_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$ суть корни многочлена $t^2 - t - 1$, а числа $\beta_\pm$ находятся по формуле (4-8) с учётом равенств $\alpha_+\alpha_- = -1$, $\alpha_+ + \alpha_- = 1$ и $\alpha_+ - \alpha_- = \sqrt{5}$: $\quad \beta_+ = -\beta_- = 1/\big(\alpha_+ - \alpha_-\big) = 1/\sqrt{5}$. Получаем:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_+ x} - \frac{1}{1-\alpha_- x}\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\alpha_+^k - \alpha_-^k}{\sqrt{5}} \cdot x^k\,,$$

откуда

$$z_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}\,.$$

Предложение 4.3

Всякая последовательность z_k, удовлетворяющая при $k \geqslant n$ линейному рекуррентному уравнению n-того порядка

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \cdots + a_n z_{k-n} = 0 \tag{4-13}$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbb{C}$, имеет вид

$$z_k = \alpha_1^k \cdot \varphi_1(k) + \alpha_2^k \cdot \varphi_2(k) + \cdots + \alpha_r^k \cdot \varphi_r(k)\,,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ суть все различные корни многочлена[1]

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n\,, \tag{4-14}$$

а каждая из функций $\varphi_i \in \mathbb{C}[x]$ представляет собою многочлен степени на единицу меньшей, чем кратность соответствующего корня α_i.

Доказательство. Ряд $\sum z_k x^k \in \mathbb{C}[\![x]\!]$, коэффициенты которого решают уравнение (4-13), является суммой дробей вида $\beta \cdot (1-\alpha x)^{-m}$, где α пробегает различные корни многочлена (4-14), показатель m может принимать любое значение от 1 до кратности соответствующего корня α, и для каждой пары α, m комплексное число $\beta = \beta(\alpha, m)$ однозначно вычисляется по α, m и первым n коэффициентам последовательности z_k. Согласно формуле (4-10) коэффициент при x^k у разложения дроби $(1-\alpha x)^{-m}$ в степенной ряд имеет вид $\alpha^k \varphi(k)$, где $\varphi(k) = \binom{k+m-1}{m-1}$ является многочленом степени $m-1$ от k. □

4.4. Логарифм и экспонента. Всюду в этом разделе мы рассматриваем ряды с коэффициентами в поле $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. В этом случае из формулы (3-7) для производной вытекает, что для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Этот ряд называется *первообразным рядом* или *интегралом* от f и обозначается

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k\,. \tag{4-15}$$

[1] Он называется *характеристическим многочленом* рекуррентного уравнения (4-11).

Определение 4.1
Первообразный ряд от знакопеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\ln(1+x) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right) dx = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k . \quad (4\text{-}16)$$

4.4.1. Логарифмирование рядов. Обозначим через $N = x \cdot \Bbbk[\![x]\!] \subset \Bbbk[\![x]\!]$ аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через $U = 1 + N \subset \Bbbk[\![x]\!]$ — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Подстановка в аргумент логарифма вместо $1+x$ произвольного ряда $u(x)$ с единичным свободным членом является алгебраической операцией, поскольку означает подстановку в логарифмический ряд (4-16) вместо переменной x ряда $u(x) - 1$ без свободного члена, а это, как мы видели[1], алгебраическая операция. Таким образом, имеется отображение *логарифмирования*

$$\ln : U \to N, \quad u \mapsto \ln u . \quad (4\text{-}17)$$

Упражнение 4.4 (логарифмическая производная). Убедитесь, что $\frac{d}{dx} \ln u = u'/u$ для всех рядов $u \in U$.

Лемма 4.3
Для рядов $u, w \in U$ равенства $u = w$, $u' = w'$, $\ln(u) = \ln(w)$ и $u'/u = w'/w$ попарно эквивалентны друг другу.

Доказательство. Первое равенство влечёт за собой все остальные. Поскольку ряды с равными свободными членами совпадают если и только если совпадают их производные, первые два равенства и последние два равенства равносильны друг другу. Остаётся показать, что из последнего равенства следует первое. Но последнее равенство утверждает, что $u'/u - w'/w = (u'w - w'u)/uw = (w/u) \cdot (u/w)' = 0$ откуда $(u/w)' = 0$, т. е. $u/w = \text{const} = 1$. □

Упражнение 4.5. Покажите, что $\forall\, u \in U \ \ln(1/u) = -\ln u$.

Определение 4.2
Ряд $e^x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0} x^k/k! = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$ называется *экспонентой*. Это единственный ряд в U, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

4.4.2. Экспоненцирование рядов. Подставляя в экспоненту вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется *экспонентой* ряда $\tau(x)$. Этим определяется экспоненциальное отображение

$$\exp : N \to U, \quad \tau \mapsto e^{\tau} . \quad (4\text{-}18)$$

[1] См. n° 3.1.1 на стр. 33.

Теорема 4.2
Экспоненциальное и логарифмическое отображения (4-18) и (4-17) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп, т. е. для любых рядов u, u_1, u_2 из U и τ, τ_1, τ_2 из N выполняются тождества:

$$\ln e^{\tau} = \tau\,, \quad e^{\ln u} = u\,, \quad \ln(u_1u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2)\,, \quad e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1}e^{\tau_2}\,.$$

Доказательство. Равенство $\ln e^{\tau} = \tau$ проверяется сравнением производных от обеих частей:

$$\left(\ln e^{\tau}\right)' = \frac{\left(e^{\tau}\right)'}{e^{\tau}} = \frac{e^{\tau}\tau'}{e^{\tau}} = \tau'\,,$$

а равенство $e^{\ln u} = u$ — сравнением логарифмических производных:

$$\frac{\left(e^{\ln u}\right)'}{e^{\ln u}} = \frac{e^{\ln u}(\ln u)'}{e^{\ln u}} = \frac{u'}{u}\,.$$

Тем самым, экспоненцирование и логарифмирование являются взаимно обратными биекциями. Ряды $\ln(u_1u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ совпадают, поскольку имеют нулевые свободные члены и равные производные:

$$\left(\ln(u_1u_2)\right)' = \frac{(u_1u_2)'}{u_1u_2} = \frac{u_1'u_2 + u_1u_2'}{u_1u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = \left(\ln u_1 + \ln u_2\right)'\,.$$

Поэтому логарифмирование — гомоморфизм, а значит, и обратное к нему экспоненцирование — тоже. □

Упражнение 4.6. Докажите в $\Bbbk[\![x, y]\!]$ равенство $e^{x+y} = e^x e^y$ непосредственным сравнением коэффициентов этих двух рядов.

4.5. Степенная функция и бином Ньютона. В этом разделе мы продолжаем считать, что поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль. Для любого числа $\alpha \in \Bbbk$ определим *биномиальный ряд* с показателем α формулой

$$(1+x)^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha\ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1+x$ произвольные ряды $u \in U$, мы для любого числа $\alpha \in \Bbbk$ получаем алгебраическую операцию $U \to U$ *возведения в α-тую степень* $u \mapsto u^{\alpha}$, обладающую всеми интуитивно ожидаемыми от степенной функции свойствами. В частности, для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$u^{\alpha}\cdot u^{\beta} = e^{\alpha\ln u}\cdot e^{\beta\ln u} = e^{\alpha\ln u + \beta\ln u} = e^{(\alpha+\beta)\ln u} = u^{\alpha+\beta} \tag{4-19}$$

$$\left(u^{\alpha}\right)^{\beta} = e^{\beta\ln(u^{\alpha})} = e^{\beta\ln\left(e^{\alpha\ln u}\right)} = e^{\alpha\beta\ln u} = u^{\alpha\beta} \tag{4-20}$$

$$(uv)^{\alpha} = e^{\alpha\ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha\ln u + \alpha\ln v} = e^{\alpha\ln u}\cdot e^{\alpha\ln v} = u^{\alpha}v^{\alpha} \tag{4-21}$$

Например, для любого ряда u с единичным свободным членом ряд $u^{1/n}$ представляет собою $\sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $\left(u^{1/n}\right)^n = u$. Для явного отыскания коэффициентов a_i биномиального ряда

$$(1+x)^{\alpha} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

вычислим его логарифмическую производную:

$$\frac{\big((1+x)^\alpha\big)'}{(1+x)^\alpha} = \big(\ln(1+x)^\alpha\big)' = \big(\alpha\ln(1+x)\big)' = \frac{\alpha}{1+x}\,.$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем равенство

$$\big(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \,\cdots\,\big)\cdot(1+x) = \alpha\cdot(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \,\cdots\,)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению $ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$, из которого

$$a_k = \frac{\alpha-(k-1)}{k}\cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))}{k(k-1)}\cdot a_{k-2} = \,\cdots$$
$$\cdots\, = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{k!}\,.$$

Стоящая в правой части дробь имеет в числителе и знаменателе по k множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от k до 1, в числителе — от α до $(\alpha-k+1)$. Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{4-22}$$

Нами доказано

Предложение 4.4 (формула Ньютона)
Для любого числа $\alpha\in\Bbbk$ имеется разложение

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geqslant 0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \,\cdots\,.$$

Пример 4.6 (бином с рациональным показателем)
При натуральном значении показателя $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (4-22) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома в этом случае конечно:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \,\cdots\, + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\,.$$

Оно уже встречалось нам в форм. (1-9) на стр. 9. При целом отрицательном $\alpha = -m$, где $m\in\mathbb{N}$, мы получаем разложение из форм. (4-9) на стр. 57:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m\,x + \frac{m(m+1)}{2}\,x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\,x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{k+m-1}{k}\cdot x^k\,.$$

При $\alpha = 1/n$, где $n\in\mathbb{N}$, формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}\,x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}\,x^3 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{n^4} + \cdots$$

Например, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$(-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \,\cdots\, \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \,\cdots\, \cdot (2k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \,\cdots\, \cdot (2k))^2} = \\ = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cdot 4^k} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \frac{x^k}{4^k}. \tag{4-23}$$

Пример 4.7 (числа Каталана)

Воспользуемся разложением (4-23) для получения явной формулы для *чисел Каталана*, часто возникающих в различных комбинаторных задачах. Будем вычислять произведение $n+1$ множителей

$$a_0 a_1 a_2 \,\cdots\, a_n \qquad (\text{всего } n \text{ умножений}) \tag{4-24}$$

делая за один шаг ровно одно умножение. Если на каждом шагу заключать вычисленное произведение в скобки, то в ходе вычисления мы расставим n пар скобок в выражении (4-24). Количество различных расстановок скобок, возникающих таким образом, называется n-ым *числом Каталана* c_n. При $n = 1$ есть лишь одна расстановка скобок: $(a_1 a_2)$, при $n = 2$ — две:

$$(a_1(a_2 a_3)) \quad \text{и} \quad ((a_1 a_2) a_3),$$

при $n = 3$ — пять:

$$(a_1(a_2(a_3 a_4))),\ (a_1((a_2 a_3) a_4)),\ ((a_1 a_2)(a_3 a_4)),\ ((a_1(a_2 a_3)) a_4),\ (((a_1 a_2) a_3) a_4).$$

Множество всех возможных расстановок скобок в произведении (4-24) распадается в дизъюнктное объединение n подмножеств, в которых конфигурации наружных скобок имеют вид

$$(a_0(a_2 \dots a_n)),\ ((a_0 a_1)(a_2 \dots a_n)),\ ((a_0 \dots a_2)(a_3 \dots a_n)),\ ((a_0 \dots a_3)(a_4 \dots a_n)),\ \dots \\ \dots,\ ((a_0 \dots a_{n-2})(a_{n-1} a_n)),\ ((a_0 \dots a_{n-1}) a_n)$$

и которые состоят, соответственно, из c_{n-1}, $c_1 c_{n-2}$, $c_2 c_{n-3}$, $c_3 c_{n-4}$, … , $c_{n-2} c_1$, c_{n-1} элементов. Если добавить к числам Каталана число $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, то мы получим рекурсивное соотношение $c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0$ на коэффициенты c_n *ряда Каталана* $c(x) = \sum_{k \geqslant 0} c_k x^k = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[\![x]\!]$, означающее, что $c(x)^2 = (c(x) - 1)/x$. Иначе говоря, $t = c(x)$ является лежащим в кольце $\mathbb{Z}[\![x]\!]$ решением квадратного уравнения $x \cdot t^2 - t - 1 = 0$ на неизвестную t. В поле рядов Лорана $\mathbb{Q}((x)) \supset \mathbb{Z}[\![x]\!]$ это квадратное уравнение решается по стандартной школьной формуле, что даёт два корня: $(1 \pm \sqrt{1-4x})/2x$. Так как ряд $1 + \sqrt{1-4x}$ имеет ненулевой свободный член, он не делится на $2x$ в $\mathbb{Z}[\![x]\!]$, и корень $(1 + \sqrt{1-4x})/(2x) \notin \mathbb{Z}[\![x]\!]$. Тем самым, $c(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$, откуда по формуле (4-23)

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \binom{2k+2}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Отметим, что с первого взгляда не вполне понятно, что это число — целое.

4.6. Ряд Тодда и числа Бернулли. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ от переменной x и кольцо многочленов $\mathbb{Q}[t]$ от переменной t. Обозначим через

$$D = \frac{d}{dt} : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t], \quad g \mapsto g',$$

оператор дифференцирования. Оператор D можно подставить вместо переменной x в любой степенной ряд $\Phi(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k x^k \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$. Результатом такой подстановки, по определению, является отображение

$$\Phi(D) : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t], \quad f \mapsto \varphi_0 \cdot f + \varphi_1 \cdot f' + \varphi_2 \cdot f'' + \dots = \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \cdot D^k f. \tag{4-25}$$

Поскольку каждое дифференцирование уменьшает степень многочлена на единицу, все слагаемые в правой части (4-25) обратятся в нуль при $k > \deg f$. Таким образом, для каждого многочлена $f \in \mathbb{Q}[t]$, правая часть (4-25) является корректно определённым многочленом, каждый коэффициент которого вычисляется конечным числом арифметических операций над коэффициентами исходного многочлена f и первыми $\deg(f)$ коэффициентами ряда Φ. Отображение $\Phi(D)$ *линейно* в том смысле, что

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\ \forall\, f, g \in \mathbb{Q}[t] \quad \Phi(D)(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \Phi(D) f + \beta \cdot \Phi(D) g, \tag{4-26}$$

а в результате подстановки D в произведение рядов $\Phi(x)\Psi(x) \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ получится *композиция* отображений $\Phi(D) \circ \Psi(D) = \Psi(D) \circ \Phi(D)$.

Упражнение 4.7. Убедитесь в этом.

Таким образом, все отображения вида $\Phi(D)$ перестановочны друг с другом, и для биективности отображения вида $\Phi(D)$ необходимо и достаточно, чтобы степенной ряд $\Phi(x)$ был обратим[1] в кольце $\mathbb{Q}[\![x]\!]$. В силу линейности значение отображения $\Phi(D)$ на произвольном многочлене выражается через его значения $\Phi_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(D) t^m$ на базисных одночленах t^m:

$$\Phi(D)\left(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\right) = a_0 + a_1 \Phi_1(t) + a_2 \Phi_2(t) + \dots + a_n \Phi_n(t).$$

Многочлен $\Phi_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ называется m-тым *многочленом Аппеля* ряда Φ. Его степень не превосходит m, а коэффициенты зависит лишь от первых $m+1$ коэффициентов ряда Φ.

Пример 4.8 (операторы сдвига)
Экспонента $e^D = 1 + D + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{6} D^3 + \dots$ имеет многочлены Аппеля

$$e^D t^m = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k t^m = \sum_{k\geqslant 0} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\, t^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^{m-k} = (t+1)^m.$$

Следовательно, оператор e^D действует на любой многочлен как *оператор сдвига*:

$$e^D : f(t) \mapsto f(t+1).$$

Так как ряды e^x и e^{-x} обратны друг другу в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, операторы e^D и e^{-D} тоже обратны друг другу, т. е. $e^{-D} f(t) = f(t-1)$.

[1] Т. е. имел ненулевой свободный член, см. предл. 3.1 на стр. 34.

Упражнение 4.8. Убедитесь, что $e^{\alpha D} f(t) = f(t+\alpha)$ при любом $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Пример 4.9 (вычисление степенных сумм)
Для произвольно зафиксированного $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ рассмотрим сумму

$$S_m(n) \overset{\text{def}}{=} 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \sum_{k=0}^{n} k^m \tag{4-27}$$

как функцию от n. При $m = 0, 1, 2, 3$ функции $S_m(n)$ достаточно известны:

$$\begin{aligned} S_0(n) &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \\ S_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2 \\ S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \\ S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 = S_1(n)^2 . \end{aligned} \tag{4-28}$$

Чтобы получить для $S_m(t)$ явное выражение, применим к этой функции *разностный оператор* $\nabla : \varphi(t) \mapsto \varphi(t) - \varphi(t-1)$. Получающаяся функция $\nabla S_m(t)$ принимает при всех $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ те же значения, что и многочлен t^m. Покажем, что существует единственный такой многочлен $S_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ с нулевым свободным членом, что $\nabla S_m(t) = t^m$. Тогда его значения при целых неотрицательных $t = 0, 1, 2, \dots$ будут рекурсивно определяться, начиная с $S_m(0) = 0$, по формуле $S_m(n) = S_m(n-1) + \nabla S_m(n) = S_m(n-1) + n^m$ и, тем самым, совпадут с суммами (4-27). Из проделанных в прим. 4.8 вычислений вытекает, что

$$\nabla = 1 - e^{-D} = \frac{1 - e^{-D}}{D} \circ D .$$

Ряд $(1 - e^{-x})/x$ имеет свободный член 1 и обратим в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$. Обратный ему ряд

$$\operatorname{td}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$$

называется *рядом Тодда*. Подставляя $x = D$ в равенство $\operatorname{td}(x) \cdot (1 - e^{-x}) = x$, получаем соотношение $\operatorname{td}(D) \circ \nabla = D$. Стало быть, производная $S_m'(t) = DS_m(t) = \operatorname{td}(D)\nabla S_m(t) = \operatorname{td}(D) t^m$ является многочленом Аппеля $\operatorname{td}_m(t)$ ряда Тодда, а искомый многочлен $S_m(t) = \int \operatorname{td}_m(t)\, dt$ представляет собою его первообразную. Для её вычисления запишем ряд Тодда в «экспоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\operatorname{td}(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k}{k!} x^k. \tag{4-29}$$

Тогда сумма m-тых степеней первых t натуральных чисел равна

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!} D^k t^m \right) dt = \int \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k t^{m-k} \right) dt = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \dots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1} \right) . \end{aligned}$$

Эту формулу часто символически представляют в виде

$$(m+1) \cdot S_m(t) = (a{\downarrow} + t)^{m+1} - a_{m+1} ,$$

где стрелка у $a\downarrow$ предписывает при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$ заменять a^k на a_k. Коэффициенты a_k рекурсивно вычисляются из равенства $\mathrm{td}(x)\cdot(1-e^{-x})/x = 1$:

$$\left(1+a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\frac{a_3}{6}x^2+\frac{a_4}{24}x^4+\,\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{120}x^4-\,\cdots\right)=1\,.$$

Упражнение 4.9. Найдите первую дюжину чисел a_k, проверьте формулы (4-28), дополните их явными формулами для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ и вычислите[1] $S_{10}(1000)$.

Замечание 4.3. (числа Бернулли) Название «ряд Тодда» вошло в обиход во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика, где этот ряд использовался для формулировки и доказательства теоремы Римана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом $\mathrm{td}(-x)=\frac{x}{e^x-1}$, отличающимся от $\mathrm{td}(x)$ ровно одним членом, ибо

$$\mathrm{td}(-x)-\mathrm{td}(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}+\frac{x}{1-e^{x}}=x\cdot\frac{2-e^x-e^{-x}}{(1-e^{-x})\cdot(1-e^x)}=x\,.$$

Это вычисление показывает, что коэффициенты при x в $\mathrm{td}(x)$ и в $\mathrm{td}(-x)$ равны соответственно $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, а все прочие коэффициенты при нечётных степенях x^{2k+1} с $k\geqslant 1$ в обоих рядах нулевые. Коэффициенты B_k в экспоненциальном представлении ряда

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{B_k}{k!}\,x^k$$

называются *числами Бернулли*. Таким образом, $B_k = a_k$ при $k\neq 1$ и обращаются в нуль при всех нечётных $k\geqslant 3$, а $B_1=-a_1=-\frac{1}{2}$. Со времён своего открытия числа Бернулли вызывают неослабевающий интерес. Им посвящена обширная литература[2] и даже специальный интернет-ресурс[3], где среди прочего есть программа для быстрого вычисления чисел B_k в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на множество красивых теорем о числах Бернулли, внятных формул, явно выражающих B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении был бы интересен.

[1] Яков Бернулли (1654 – 1705) пользуясь лишь пером и бумагой сложил 10-е степени первой тысячи натуральных чисел примерно за 7 минут, о чём не без гордости написал в своём манускрипте «Ars Conjectandi», изданном в 1713 году уже после его кончины.

[2] Начать знакомство с которой я советую с гл. 15 книги *К. Айрлэнд*, *М. Роузен*. «Классическое введение в современную теорию чисел» и § 8 гл. V книги *З. И. Боревич*, *И. Р. Шафаревич*. «Теория чисел».

[3] http://www.bernoulli.org/

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Равенство несократимых записей $p/q = r/s$ означает равенство $ps = qr$, в котором p взаимно прост с q, S взаимно прост с R, и q и S приведены. Из лем. 2.3 следует, что тогда $p = rf$, а $q = sg$ для некоторых $f, g \in \Bbbk[x]$. Равенство $frs = grs$ влечёт $f = g$. Поскольку нод(p, q) = нод$(rg, sg) = 1$, многочлен g — обратимая константа, а т. к. q и S приведены, $g = 1$.

Упр. 4.3. Согласно правилу дифференцирования композиции $\left(f^m\right)' = m \cdot f^{m-1} \cdot f'$, имеем $\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^m\right)' = m(1-x)^{-m-1}$, откуда нужная формула легко получается по индукции.

Упр. 4.4. Воспользуйтесь форм. (3-9) на стр. 36 для производной композиции.

Упр. 4.5. Продифференцируйте обе части.

Упр. 4.9. Ответы: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$,

$$S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$
$$S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1)/12$$
$$S_{10}(1000) = 91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500\,.$$