Лекция 17 декабря (первая половина)

$$V \simeq \frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}$$

$p_i \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы.
(слагаемые могут повторяться)

неразложимость $\Leftrightarrow$ слагаемое ровно одно.

неприводимость $\Leftrightarrow$ слагаемое ровно одно и $m = 1$, т.е.

(*)

$$V \simeq \frac{\Bbbk[t]}{(p)}$$

где p – приведён и неприводим.

в частности: над $\mathbb{R}$ есть только 1-мерные и 2-мерные неприводимые пространства с операторами, а над алгебраически замкнутым полем — только одномерные.

Док-во (*): $m \geq 2$ то пр-во приводимо

$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p^2)}$ указать $\mathbb{k}[t]$-подмодули

$\{[p]\}$ - подмодуль

пр

$\mathbb{Z}/(p^2)$ $p \in \mathbb{Z}$ простое

$\mathbb{Z}$-подмодуль

$\mathbb{Z}/(4)$ $[0][1][2][3][4]$

$[0]$ $[2]$ $[4]$

$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p)}$ могут быть $\mathbb{k}[t]$-подмодули

$\uparrow$ это поле

$[q]$ лежит в подмодуле

$[u] = [q]^{-1}$

$\mathbb{k}[t]$ подмодули в кольце $\frac{\mathbb{k}[t]}{(p)}$ это идеалы в этом кольце, а их нет!

$u[q] = [1] \in$ лежит в подмодуле

$\Downarrow$

$[f] = f \cdot [1]$ тоже лежит в подмодуле

Набор степеней $p_i^{m_i}$, участвующих в разложении $V \simeq \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_s^{m_s})}$

называется набором элементарных делителей оператора F, обозначение: $\mathcal{E}l(F)$

Вывод: F_1 подобен $F_2 \iff \mathcal{E}l(F_1)=\mathcal{E}l(F_2)$

Пример: Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Тогда всякий неприводимый $p_i(t)=t-\lambda_i$

$$(F,V)\simeq \bigoplus_i \frac{\Bbbk[t]}{((t-\lambda_i)^{m_i})} \circlearrowleft t$$

(пары λ_i, m_i могут повторяться).

$$m_i=1 \quad \frac{\Bbbk[t]}{((t-\lambda))} \simeq \Bbbk\cdot[1]$$

одномерно с базисом $[1]$

$F: [1] \longmapsto t\cdot[1] = \lambda\cdot[1]$

F – умножение на λ.

Вектор $v \in V$ наз. собственным, если $Fv = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}$. Такое λ наз. собственным значением или собственным числом оператора F.

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{((t-\lambda)^m)} \qquad m \text{ - набор} \qquad \overset{e_1}{\left[(t-\lambda)^{m-1}\right]}, \overset{e_2}{\left[(t-\lambda)^{m-2}\right]}, \ldots, \overset{e_{m-1}}{\left[t-\lambda\right]}, \overset{e_m}{\left[1\right]}$$

$$F = t = \lambda + (t-\lambda) = \lambda \cdot \mathrm{Id} + (t-\lambda).$$

умножение на $(t-\lambda)$

гомотетия с к-том λ

$$e_k = \left[(t-\lambda)^{m-k}\right]$$

$$(t-\lambda) : e_m \mapsto e_{m-1} \mapsto e_{m-2} \mapsto \ldots \mapsto e_1 \mapsto 0$$

$$F_e = \lambda E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{матрица умножения}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{жорданова клетка}} \Big\} m$$

мат в базисе $\qquad J_m(\lambda)$

$e_k = [(t-\lambda)^{m-k}]$

Фактор-кольца $\dfrac{\Bbbk[t]}{((t-\lambda)^m)}$

Следствие: Над алгебраически замкнутым полем каждый оператор подобен оператору с матрицей

$$\boxed{JJ} \rightarrow \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

где блоки могут повторяться, и два оператора подобны $\Longleftrightarrow$ такие матрицы отличаются друг от друга перестановкой блоков.

В терминах матриц: Любая квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ - алг. замкнуто, подобна матрице вида

$$(\exists C \in GL_n(\Bbbk) : CAC^{-1} = \underset{\text{жорданова нормальная}}{\boxed{JJ.}})$$

форме

Ж.Н.Ф. однозначно определяется матрицей A с точностью до перестановки блоков

набор пар (λ_i, m_i) — это в
тиности набор элементарных дели-
телей? $(t-\lambda_i)^{m_i}$ оператора F с

матрицей A.

Характеристический? многочлен

$$\det(t\,Id - F) = \det(tE - F_e)$$

где F_e — матрица F в любом базисе e пр-ва V.

не зависит от выбора базиса

$$F_e \longrightarrow C F_e C^{-1}$$

$$\det(tE - F_e) \longrightarrow \det(t\overset{C\cdot C^{-1}}{\overset{\shortparallel}{E}} - C F_e C^{-1})$$

$$\shortparallel$$

$$\det(C(tE-F)C^{-1})$$

$$\shortparallel$$

$$\cancel{\det(C)\cdot\det(C^{-1})}\cdot\det(tE-F)$$

$V = U_1 \oplus U_2$ и U_1, U_2 F-инвариантны

$$F \quad \begin{array}{|c|c|} \hline F|_{U_1} & 0 \\ \hline 0 & F|_{U_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\chi_F = \det \begin{array}{c|c|c|c} & k & m & \\ \hline k & tE - F|_{U_1} & 0 & k \\ \hline & 0 & tE - F|_{U_2} & m \\ \hline \end{array}$$

M $|I| + |J|$ чётно

$(\underbrace{k+1, \dots, k+m}_{I}), (\underbrace{k+1, \dots, k+m}_{J})$

$$= \det(tE - F|_{U_1}) \cdot \det(tE - F|_{U_2})$$

$$\chi_F(t) = \chi_{F|_{U_1}}(t) \cdot \chi_{F|_{U_2}}(t).$$

$V = \dfrac{\Bbbk[t]}{(f)}$ $\qquad f = \underbrace{a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1}} + t^m$

F — умножение на $t : [g] \longmapsto [tg]$

$$\chi_F(t) = \begin{array}{c|cccc|} & [t^{m-1}] & [t^{m-2}] & \dots & [t] \quad 1 \\ \hline [t^{m-1}] & -a_{m-1} & 1 & & 0 \\ [t^{m-2}] & & & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & & \ddots \quad \vdots \end{array}$$

$F:$

$$\begin{array}{c} \\ \\ [t] \\ [1] \end{array} \begin{pmatrix} \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 1 \\ -a_0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$tE - F$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} t+a_m & -1 & & 0 \\ a_{m-1} & t & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ a_0 & 0 & & t \end{pmatrix}_m$$

Разложим по первому столбцу.

$$(t+a_m)\cdot\det\begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ 0 & & t \end{pmatrix} = t^{m-1}(t+a_m)$$

$$-\ a_{m-1}\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & t \end{pmatrix} = a_{m-1}t^{m-2}$$

$$a_{m-2}\cdot\det\left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & t & -1 & 0 \\ & 0 & & \ddots & -1 \\ & & 0 & & t \end{array}\right) = a_{m-2}t^{m-3}$$

$\boxed{\text{На дом!}}$ Убедиться, что $\chi_F(t)$ оператора F умножения на t в фактор-кольце $\dfrac{\Bbbk[t]}{(f)}$ равен [illegible] в плоском f 8

$\chi_F(t)$ = произведение всех элементарных делителей оператора F.

$$\frac{k[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{k[t]}{(p_s^{m_s})}$$

Предупреждение Поскольку слагаемые могут повторяться, то набор элементарных делителей — это не то же самое что разложение χ_F на простые множители.

$$\boxed{\chi_F = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$V = \frac{k[t]}{(p_1^{k_1})} \oplus \dots \oplus \frac{k[t]}{(p_1^{k_s})} \oplus \frac{k[t]}{(p_2^{l_1})} \oplus \dots \oplus \frac{k[t]}{(p_2^{l_v})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1+\dots+k_s &= m_1 \\ l_1+\dots+l_v &= m_2 \end{aligned}}$$

Вскр. 11:00 условия будут на сайте.

решения послать до 15:00 по указанному на сайте адресу.

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\dots}$$

$$\left[\begin{aligned} (1+1)^n &= \ldots\quad 2^n \\ (1-1)^n &= \ldots\quad 0 \end{aligned}\right.$$

$(1+i)^n = \ldots$

$(1-i)^n = \ldots$