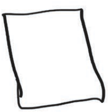
Лекция 17 декабря (первая половина)

Экзамен состоится в
воскресенье 20 декабря с 11^{00} до $15^{\underline{00}}$

Условия будут на странице курса.
на gorod.bogomolov-lab.ru

Решения надо послать не позднее $15^{\underline{00}}$
по указанному на странице адресу

Решение пишутся от руки
(это обязательно) на бумаге или на
планшете.



Фотографируете, сканируете,
сохраняете в jpg, png, pdf

Посылаете на указанный адрес
как attachment (!)

Сдавать листки 1-го семестра можно только ДО воскресенья, 11^{00}

Пространства с операторами

(для след. семестра).

$\Bbbk$ - любое поле

Конечномерные векторные пр-ва V с линейным оператором $F : V \to V$

Пара (V, F) называется пространством с оператором.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "C"'] & V_1 \arrow[d, "C"] \\
V_2 \arrow[r, "F_2"] & V_2
\end{tikzcd}$$

гомоморфизм пространств с операторами $(F_1, V_1) \xrightarrow{C} (F_2, V_2)$ это линейное отображение $C : V_1 \to V_2$: $CF_1 = F_2 C$

$(F_1, V_1) \simeq (F_2, V_2)$ изоморфны, если $\exists$ изоморфизм $C : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$: $\longrightarrow$ $CF_1 = F_2 C$

$CF_1 C^{-1} = F_2$ или $F_1 = C^{-1} F_2 C$

т.е. F_1 и F_2 сопряжены при помощи C

(F_1 и F_2 подобны).

Пр-во (F, V) приводимо, если

$\exists\, U \subsetneq V : F(U) \subset U$

$U \neq 0$

такое U называется F-инвариантным подпр-вом.

это вложение пр-в сонер-ми

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "F|_U"] \arrow[d, hook] & U \arrow[d, hook] \\
V \arrow[r, "F"] & V
\end{tikzcd}$$

Пр-во (F, V) наз. разложимым, если $V = U_1 \oplus U_2$, где U_1, U_2 оба F-инвар.

На матричном языке:

$U \subset V$ F-инвариантно $\Rightarrow \exists$ базис в V:

$$\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{базис в } U}, w_1, \dots, w_m$$

В этом базисе F имеет матрицу вида

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & u & w \\
\hline
u & F|_U & * \\
\hline
w & 0 & * \\
\hline
\end{array}$$

Приводимость

$V = U_1 \oplus U_2$ U_1, U_2 F-инвар. $\Rightarrow$

$$\underbrace{u_1 \dots u_k}_{\text{базис в } U_1} \underbrace{w_1 \dots w_m}_{\text{базис в } U_2}$$

у F в этом базисе будет матрица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline F|_{U_1} & 0 \\ \hline 0 & F|_{U_2} \\ \hline \end{array}$$

- Любое пр-во с оператором является прямой суммой неразложимых
- Любое неприводимое (без F-инвар. подпр-в $U<V$, $U\neq 0$, $U\neq V$) неразложимо.
- Если $\dim V=1$, то V неприводимо.

Пример неодномерного неприводимого:

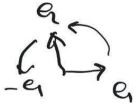
$$V = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)} \quad \text{над } \mathbb{R}$$

F = умножение на класс $[x]: [f] \to [xf]$

$[1]$ $[x]$ $[x^2]=[-1]$

нет 1-мерных инвариантных подпространств

$$\begin{array}{c|cc|} [1] & 0 & -1 \\ [x] & 1 & 0 \end{array}$$



поворот на 90°

• В любой размерности над любым полем есть неразложимые пр-ва с оператором,

$$V = \frac{\mathbb{k}[t]}{(t^n)}, \quad \dim V = n$$

$$F : [f] \longrightarrow [tf]$$

все подпр-ва вида $\mathrm{Span}(t^k, t^{k+1}, \dots, t^{n-1})$

$$t^k \mapsto t^{k+1} \mapsto \dots \to t^{n-1} \to 0$$

F-инвариантны

Неразложимо $V = \underset{\substack{\cup \\ g_1 \neq 0}}{U_1} \oplus \underset{\substack{\cup \\ g_2 \neq 0}}{U_2}$

$g_1 = c_i t^i +$ старшие, $c_i \neq 0$ $\qquad$ $g_2 = c_j t^j +$ старшие, $c_j \neq 0$

$$\begin{tikzcd} g_1 \arrow[d, "t^{n-1-i}"] & g_2 \arrow[d, "t^{n-1-j}"] \\ c_i t^{n-1} \in U_1 & c_j t^{n-1} \in U_2 \end{tikzcd}$$

$t^{n-1} \in U_1 \cap U_2$ противоречие!

Каждое пр-во с оператором (F, V) является модулем над кольцом многочленов $\Bbbk[t]$.

$$f(t) = \overset{c_0\cdot 1 = c_0\cdot t^0}{\overset{\shortparallel}{c_0}} + c_1 t + \ldots + c_m t^m$$

$$f(t)\cdot v := c_0 v + c_1 F v + c_2 F^2 v + \ldots + c_m F^m v =$$

$$= f(F)\cdot v$$

$$f(F) = \underset{c_0 \boxed{F^0}_{:=E}}{\underset{\shortparallel}{c_0\cdot E}} + c_1 F + \ldots + c_m F^m : V \longrightarrow V$$

Упр: Правило умножения векторов из V на многочлены $f(t) \in \Bbbk[t]$ задаёт на V структуру модуля над $\Bbbk[t]$.
(проверить аксиомы модуля!)

$U \subset V$ F-инвариантно
т.е. $F(U) \subset U$

$$\Updownarrow$$

$t \cdot U \subset U$ $\qquad tu = Fu$

$\Updownarrow$

$\Bbbk[t]\cdot U \subset U$, т.е. U — это $\Bbbk[t]$-подмодуль в V

$V = U_1 \oplus U_2$, где U_1, U_2 F-инвариантны

прямая сумма $\Bbbk[t]$-модулей.

Любое пр-во с оператором изоморфно пр-ву

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1(t)^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2(t)^{m_2})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s(t)^{m_s})}$$

где все p_i приведены и неприводимы, $m_i \in \mathbb{N}$, а оператор F — это умножение на класс $[t]$ в этой прямой сумме фактор-колец; причём два таких пр-ва изоморфны:

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})} \simeq \frac{\Bbbk[t]}{(q_1^{l_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(q_r^{l_r})}$$

тогда и только тогда, когда $r = s$ и слагаемые можно перенумеровать так, что $p_i = q_i$, $m_i = l_i$ для всех i

---

Док-во: По теореме о строении $\Bbbk[t]$-модулей, каждый $\Bbbk[t]$-модуль имеет вид

$$\Bbbk[t]^r \oplus \bigoplus_i \frac{\Bbbk[t]}{(p_i(t)^{m_i})}$$

и это представление единственно с точностью до перестановки слагаемых.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{умножение} \\ \text{на } t \text{ в } V}}{(F,V)} \simeq \underbrace{\Bbbk[t]^n}_{} \oplus \underset{\substack{\circlearrowleft \\ F\text{ - умножение} \\ \text{на } t}}{\bigoplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_i(t)^{m_i})}}$$

$\dim_{\Bbbk} V < \infty \Rightarrow r = 0$ свободного слагаемого нет!
