Лекция 10 декабря (первая половина)

Над кольцом главных идеалов K любую матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ можно элементарными преобразованиями строк и столбцов привести к "диагональному виду" $D=(d_{ij})$ в котором $d_{ij}=0$ при $i\neq j$, и $\forall\, i<j\ d_{ii}\,|\,d_{jj}$

Эквивалентно: $\exists$ матрицы $L\in GL_m(K)$ и $R\in GL_n(K)$: $LAR=D$

При этом: (1) матрица D не зависит от способа выбора матриц L и R (т.е. от способа приведения) и $d_{ii}=\Delta_i(A)/\Delta_{i-1}(A)$,

где $\Delta_i(A)=$ НОД миноров размера $i\times i$ в A.

(2) матрицы L и R можно указать явно

Для этого надо привести Г-образную

матрицу

$$\begin{array}{c|c|c|c} & n & m & \\ \cline{2-3} m & A & E & m \\ \cline{2-3} n & E & & \\ \cline{2-2} & n & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & L \\ \hline R & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

D иногда называется нормальной формой

Смита матрицы A.

Примеры применения:

(1) Решение систем линейных уравнений над K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{Ab} \arrow[d, squiggly] \\ \boxed{D|b'} \end{tikzcd}$$

$$Ax = b$$

$$\Updownarrow$$

$$L^{-1}DR^{-1}x = b$$

$D = LAR$

форма Смита

$A = L^{-1}DR^{-1}$

$$D\underbrace{R^{-1}x}_{y} = Lb$$

$$\boxed{Dy = b'}$$

b' получается из b теми же преобразованиями строк, которые делаются в A.

$$\begin{cases} d_{11}y_1 = b_1 \\ d_{22}y_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ d_{kk} y_k = b_k \\ 0 = b_{k+1} \\ 0 = b_{k+2} \\ 0 = \cdot \end{cases}$$

чтобы решение было, необходимо чтобы $b_i \vdots d_{ii}$ $\forall i$

$$\left[\begin{array}{l} y_i = b_i / d_{ii} \quad i=1,\dots,k \\ y_i \text{ - любые при } i>k \end{array}\right.$$

в частности $b_i = 0$ при $i > k$ (когда $d_{ii} = 0$).

$y = R^{-1} x$ $\boxed{x = Ry}$

Упр.: Решить методом Гаусса те линейные диофантовы уравнения из 3-го листка, которые до этого решались, как учили в школе на кружке

Теорема об инвариантных множителях (Теорема о взаимном базисе).

$F \simeq K^n$ свободный модуль ранга n

$N < F$ — подмодуль [N автоматически свободен и конечно порожден, $\operatorname{rk} N \leq n$]

Тогда $\exists$ такой базис $e_1, \dots, e_n$ в F, что некоторые кратности $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m$ первых $m \leq n$ базисных векторов составляют базис в подмодуле N и кратности делят друг друга: $\lambda_i \mid \lambda_j$ при $i<j$

Док-во: Пусть $v=(v_1, \dots, v_n)$ какой-то базис в F, а $u=(u_1, \dots, u_k)$ - какие-то образующие в подмодуле N

$$u_1 = (u_{11} \dots u_{n1}) \in K^n$$
$$- \; - \; - \; -$$
$$u_k = (u_{k1} \dots u_{nk}) \in K^n$$

$$\underline{\underline{u = v \cdot C_{vu}}} \qquad C_{vu} \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(K)$$

$\exists L \in GL_k, R \in GL_n$: в j-том столбце стоят координаты вектора u_j в базисе v

$$\underline{\underline{L C_{vu} R}} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

при этом $\lambda_i \mid \lambda_j$ при $i<j$ $\quad \lambda_i := d_{ii}$

$$\boxed{v = eL}$$

$$\boxed{w = uR}$$

$$\boxed{u = wR^{-1}}$$

$u = v \cdot C_{vu}$

$u = eLC_{vu}$

$wR^{-1} = eLC_{vu}$

$$\boxed{w = eLC_{vu}R}$$

$w = eD$

$e = (e_1, \dots, e_n) := v \cdot L^{-1}$ это тоже базис в $\underline{\underline{F}}$.

$$w = (w_1, \dots, w_k) = eD = (\underbrace{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_r e_r}_{\text{ненулевые } \lambda}, 0, 0, \dots 0)$$

$\Downarrow$

$w_1 = \lambda_1 e_1, \dots, w_r = \lambda_r e_r$

базис в подмодуле N, поскольку эти векторы линейно независимы

образующие $u = w \cdot R^{-1}$ линейно выражаются через $w_1, \dots, w_r$ $\Rightarrow$ w порождают подмодуль N.

Зам.: множители $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ не зависят от выборов взаимных базисов. (называются инвариантными множителями подмодуля $N \subset K^n$).

$e' = (e_1', \dots, e_n')$ в F $\quad e'' = (e_1'', \dots, e_n'')$

$w' = (\lambda_1' e_1', \dots, \lambda_r' e_r')$ в N $\quad w'' = (\lambda_1'' e_1'', \dots, \lambda_r'' e_r'')$

$r = \mathrm{rk}\, N$

$$w' = e' \underset{\text{диаг.}}{D'} = e' C_{e'w'}$$

$$\underset{\sim}{C_{e'w'}} = C_{e'e''} \underline{\underline{C_{e''w''}}} C_{w''w'}$$

$$\underset{\sim}{C_{e''w''}} = E \, \underline{\underline{C_{e''w''}}} \, E$$

$$\Downarrow \qquad \Delta = C_{e''w''}$$

$$C_{e''w''} = C_{e'w'}$$

(?) Как устроен любой конечно порождённый модуль над кольцом главных идеалов

M порождён $w_1, \dots, w_m$

$$K^m \xrightarrow{\pi_w} M \quad \text{сюръективно.}$$

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$$

$M = K^m / R_w$ $R_w = \ker \Pi_w$

модуль соотношений

$R = \{ (x_1, \dots, x_m) \in K^m \mid x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = 0 \}$

это все линейные соотношения между образующими.

По теореме о взаимном базисе $\exists$ базис $e_1, \dots, e_m$ в K^m: $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_r e_r$ образуют базис в $R \subset K^m$ и $\lambda_1 \mid \lambda_2 \mid \lambda_3 \dots \mid \lambda_r$

$$M = \frac{Ke_1 + \dots + Ke_n}{K \cdot \underline{\lambda} e_1 + \dots + K \underline{\lambda_r} e_r} = \underbrace{\frac{K}{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(\lambda_r)} \oplus K^{n-r}}$$

$$M \simeq \frac{K}{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(\lambda_r)} \oplus K^{n-r} \qquad r = \operatorname{rk} R$$

разложим каждый λ_i на простые множители в K: $\lambda_i = p_{i,1}^{m_{i,1}} \cdot p_{i,2}^{m_{i,2}} \cdots p_{i,k_i}^{m_{i,k_i}}$

где все p_{ij} попарно неассоциированные простые.

По К.Т.О. $\frac{K}{(\lambda_i)} \simeq \frac{K}{(p_{i,1})^{m_{i,1}}} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(p_{i,k_i}^{m_{i,k_i}})}$

Любой модуль над кольцом главных идеалов имеет вид

$$M \cong \underbrace{K^s \oplus \frac{K}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{K}{(p_t^{m_t})}}_{},$$

где все $p_i \in K$ – просты. и слагаемые могут повторяться.

Те p^m, что присутствуют в знаменателях — это дизъюнктное объединение всех степеней простых, которые участвуют в разложении инвариантных множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ на простые множители в K.

Эти p^m называются *элементарными делителями*

Замечание: Есть естественная биекция между последовательностями элементов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ в которых $\lambda_i | \lambda_j$ при $i<j$ (все λ_i рассматриваются с точностью до умножения на обратимые) и произвольными наборами степеней простых чисел p^m у K (каждое p рассматривается с точностью до умножения на обратимые, степени p^m могут повторяться).

$$\begin{tikzcd} \lambda_1 | \lambda_2 | \dots | \lambda_r \arrow[r, shift left] & \{p^m\} \arrow[l, dashed, bend left, shift left] \end{tikzcd}$$

Все степени простых (с повторениями) которые участвуют в разложении $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_r$ не просто

$$p_1^{m_1^1}\, p_1^{m_2^1} \dots p_1^{m_{\lambda_1}^1} \qquad \{p^m\}$$

в порядке убывания показателей выписаны все степени p_1^m $\longrightarrow$

из множеств

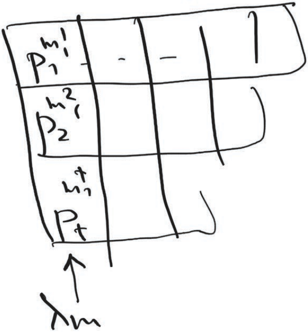
$p_2^{m_1^2} \dots p_2^{m_{\lambda_2}^2}$

p₁ – это такое основание, степеней которого больше всего

p₂ – следующ

и

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$

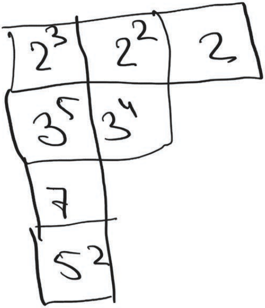


$$\underline{\underline{\lambda_1 | \lambda_2 | \quad \lambda_m}}$$

λ_m – произведение эл-тов 1-го столбце
2-го столбца

λ_{m-1} – " —————— "

— — —



$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$$
$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2^2 3^4 \quad \lambda_3 = 2^3 3^5 7 \cdot 5^2$$