Лекция 3 декабря (вторая половина)

Строение модулей над кольцами главных идеалов.

K – кольцо главных идеалов, в частности, целостное, с единицей.

Рассматриваем конечно порождённые K-модули.

Метод Гаусса: $A = \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$

Элементарное преобразование строк меняет какие-нибудь две строки a_i, a_j на их линейные комбинации

$$\begin{aligned} a_i' &= \alpha\cdot a_i + \beta a_j \\ a_j' &= \gamma a_i + \delta a_j \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_i' \\ a_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix}$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ← условие обратимости матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

В этом случае строки a_i, a_j обратно восстанавливаются по строкам a_i' и a_j'

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix}\delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix} & \text{если } \alpha\delta-\beta\gamma=1 \\ \begin{pmatrix}-\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix} & \text{если } \alpha\delta-\beta\gamma=-1 \end{cases}$$

Элементарное преобразование строк не меняет линейной оболочки строк.

Иными словами: элементарное преобразование строк умножает матрицу A слева на обратимую матрицу L, которая получается из *единичной* m×m-матрицы E тем самым элементарным преобразованием строк, которое делается в A.

Симметрично: можно делать элементарные преобразования столбцов, которые не меняют линейной оболочки столбцов и заключаются в умножении матрицы A справа на обратимую n×n-матрицу R, которая получается из единичной n×n-матрицы E тем самым элементарным преобразованием столбцов, которое производится в матрице A.

Ключевая лемма: Если в одной строке матрицы A стоят числа a и b: $a \nmid b$ и $b \nmid a$, то элементарным преобразованием содержащих эти числа столбцов можно превратить пару (a,b) в пару $(d,0)$ где $d = \text{НОД}(a,b)$.

Док-во: $d = ax + by$

$$\underline{a = a_1 \cdot d} \quad \underline{b = b_1 \cdot d.}$$

Тогда: $\boxed{a_1 x + b_1 y = 1} \Leftarrow \begin{matrix} d = ax + by \\ a_1 dx + b_1 dy \end{matrix}$

$$\det \begin{pmatrix} x & -b_1 \\ y & a_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$(a,b) \begin{pmatrix} x & -b_1 \\ y & a_1 \end{pmatrix} = (\underset{d}{\underset{\shortparallel}{ax+by}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{-ab_1 + a_1 b}})$$

Симметричный факт: Если в матрице A в одном столбце стоят числа a и b: $a \nmid b$ и $b \nmid a$, то элементарным преобразованием строк, содержащих эти числа, можно превратить пару $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ в пару $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ где $d = \text{НОД}(a,b)$.

Теорема о приведении к диагональному виду: Любая прямоугольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ над кольцом главных идеалов K может быть конечным числом элементарных преобразований строк и столбцов превращена в матрицу D, у которой $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, и при этом $d_{11} \mid d_{22} \mid d_{33} \dots$ для ненулевых элементов на главной диагонали. Более того, матрица D с таким свойством *не зависит* от способа приведения.

Док-во: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

переставляя столбцы и строки, добьёмся того, чтобы $c_{11} \neq 0$.

ключевой шаг: добьёмся того, чтобы все элементы матрицы делились на левый верхний угловой элемент

- если в 1й строке или в 1-м столбце есть элемент $a \not\vdots c_{11}$

$d = \text{НОД}(a, c_{11})$ это собств. делитель c_{11}

$$(d) \supsetneq (c_{11})$$

можно заменить $(c_{11}, a) \longrightarrow (d, 0)$ элементарным преобразованием, это строго увеличит идеал (c_{11})

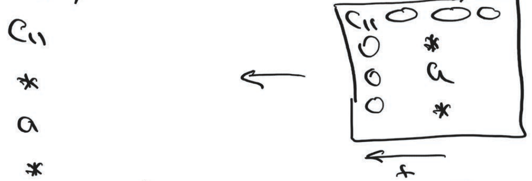
заменит (c_{11}) на (d).

- после конечного числа таких преобразований все элементы 1й строки и 1-го столбца будут делиться на c_{11}

если остался какой-то $a \not\vdots c_{11}$ строго ниже и правее, чем c_{11},

мы занулим первую строку и первый столбец вне c_{11}, отнимая из всех строк подходящие кратности 1й строки, а из всех столбцов — подходяуже кратности первого столбца.

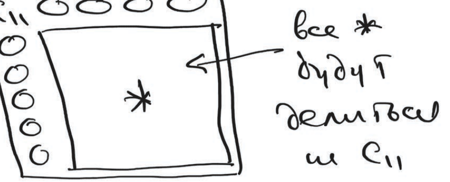
при этом к a добавится что-то, кратное c_{11}, и новый $a \not\vdots c_{11}$



прибавим к первому столбцу тот столбец, где стоит a. $\longrightarrow$ можно заменить $\begin{pmatrix}c_{11}\\a\end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix}d\\0\end{pmatrix}$

где $d = \text{НОД}(c_{11}, a)$ $(d) \supsetneq (c_{11})$.

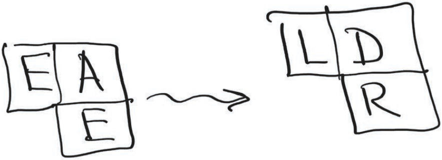
После конечного числа таких замен получим матрицу, у которой все элементы делятся на c_{11}.



Независимость от способа приведения.

$$A \longrightarrow D = LAR$$

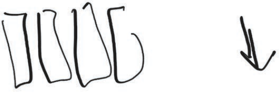
где L и R обратимы L - это совокупное преобразование строк, R - это совокупное преобразование столбцов



НОД k×k-миноров у матрицы A такой же, как у матрицы D.

$$A \longrightarrow AR$$

у матрицы AR столбцы - это линейные комбинации столбцов матрицы A. Каждый k×k минор матрицы AR это линейная комбинация k×k-миноров матрицы A.



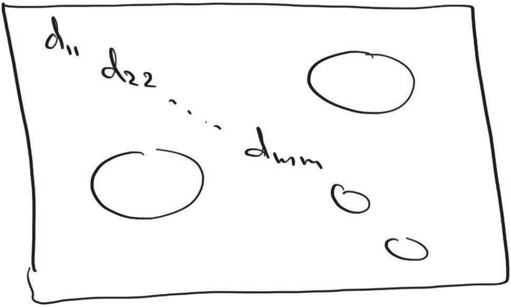
НОД $k\times k$-миноров матрицы
AR делится на НОД $k\times k$-миноров
матрицы A.

$$A = AR \cdot R^{-1}$$
$$\Downarrow$$

НОД $k\times k$-миноров в A
делится на НОД $k\times k$-миноров
в AR.

$A \to AR$ $\qquad$ $A \to L\cdot A$

$D =$



$d_{11} \mid d_{22} \mid d_{33} \mid \dots$

НОД $k\times k$-миноров в $D = d_{11} \cdots d_{kk}$.

$$\boxed{d_{ii} = \frac{\text{НОД } i\times i\text{-миноров в } A}{\text{НОД } (i-1)\times(i-1)\text{-миноров в } A}}$$

(c_{11}) "строго уменьшаем абсолютную величину c_{11}"

„ строго увеличиваем идеал (c_{11})

заменяем c_{11} на его собственные

делители"

c_{11}

a — a не ассоциирован с c_{11} $\longrightarrow \underset{c_{11}}{\textcircled{a}}$

и $a \mid c_{11}$

$$\begin{pmatrix} da \\ a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$