Лекция 3 декабря (первая половина)

$$\underbrace{C\cdot C^{\vee} = C^{\vee}\cdot C = \det C\cdot E,}\qquad \circledast$$

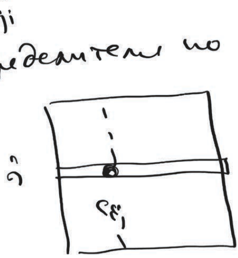
где $C=(c_{ij})$ - буквенная квадратная матрица, $C^{\vee}=(c^{\vee}_{ij})$ - присоединённая матрица, $c^{\vee}_{ij}=(-1)^{i+j}\det C_{\hat{j}\hat{i}}$

матрица, получающаяся из C удалением креста с центром в c_{ji}

в позиции ii на главной диагонали $(*)$

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot\underbrace{(-1)^{i+j}\det C_{\hat{i}\hat{j}}}_{c^{\vee}_{ji}}$$

формула для разложения определителя по i-той строке



есть аналогичная формула для разложения по столбцу: $\det C = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\cdot(-1)^{i+j}\det C_{\hat{k}\hat{j}}$

Если в (*) взять не диагональный элемент (ik) то получим "теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения"

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot(-1)^{k+j}\cdot\det C_{\hat{k}\hat{j}} = 0$$

при $k \neq i$

Второе правило Крамера:

$$\left.\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots \\ a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}\right\} n \text{ штук}$$

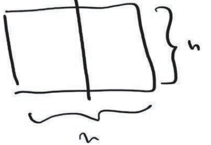
неизвестных $(n+1)$ штук: $x_0, \dots, x_n$.

Над полем $\mathbb{k}$. Пересечение n гиперп-тей в $\mathbb{k}^{n+1}$. Если уравнения линейно независимы, то мн-во решений одномерно

$$A = \boxed{\quad a_{ij} \quad}\, n \qquad \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 0 \le j \le n \end{matrix} \qquad i$$

$n+1$

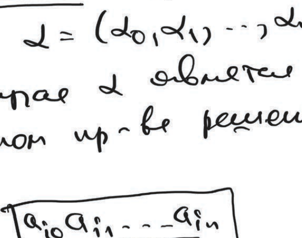
$\alpha_i = (-1)^i \det A_{\hat{i}}$ $A_{\hat{i}} =$



получается из A вычеркиванием i-того столбца.

Предложение: Уравнения линейно независимы $\Leftrightarrow$ $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ и в этом случае α является базисным вектором в 1-мерном пр-ве решений.

$\hat{A} =$



i-ую строку повторили сверху.

$\det \hat{A} = 0$ если раскрыть по верхней строке, получим $a_{i0} \cdot \alpha_0 + a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n = 0$ вектор α удовлетворяет i-тому уравнению. $\forall i$ можно так поступить.

Если уравнения линейно независимы, то по лемме о замене в $\Bbbk^{n+1}$ существует базис из строк матрицы A и какого-нибудь стандартного базисного вектора e_i

$(0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0)\; e_i$

$$\det\left(\begin{array}{c:c} \overline{} & \\ & A \\ & \end{array}\right)_{i} \neq 0$$

$\alpha_i \neq 0$, если разложить по i-той строке.

Если уравнение линейно зависимы, то строки всех матриц $A_{\hat{i}}$ тоже линейно зависимы $\Rightarrow$ $\alpha_i = \det A_{\hat{i}} = 0$.

Грассмановы многочлены

Кольцо Грассмановых многочленов от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ с к-тами в комм. кольце K с единицей

$$K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$$

определяется точно также как обычное кольцо многочленов, только Грассмановы переменные антикоммутируют, т.е.

$$\boxed{\forall i,j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i\,, \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0}$$

грассманово произведение

если $1 \neq -1$
то это условие
вытекает из левого
при $i = j$

Алгебра $K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ конечномерна.

Базис состоит из мономов

$$\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$$

$I = (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ – возрастающее подмножество в $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$\boxed{\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(k)}} = \operatorname{sgn}(g) \cdot \xi_I \quad \forall\, g \in S_k}$$

$\Lambda^k < K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ подмодуль однородных многочленов степени k.

Базис состоит из ξ_I : $\#I = k$

$$\dim \Lambda^k = \binom{n}{k}.$$

$$\dim K\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle = 2^n = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{константы} \\ K\cdot 1 \quad 1=\xi_\varnothing}}{\binom{n}{0}} + \dots + \underset{\substack{\nearrow \\ \text{старшая} \\ \text{компонента} \\ K\cdot\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n}}{\binom{n}{n}}$$

$$\xi_I \in \Lambda^k \quad \eta_J \in \Lambda^m$$

$$\xi_I \wedge \eta_J = \eta_J \wedge \xi_I \cdot (-1)^{km}$$

$$\underleftarrow{\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k}\wedge\eta_{j_1}}\wedge\dots\wedge\eta_{j_m}$$

Для однородных грассмановых многочленов

$$\underbrace{\omega\wedge\eta = \eta\wedge\omega\cdot(-1)^{\deg\omega\cdot\deg\eta}}_{\text{S-коммутативность}}$$

Пусть $\underbrace{(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_n)\cdot C}$

Тогда мономы ξ_I легко выразить

через мономы η_I , $I = i_1 < \dots < i_k$

$$\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\Big(\sum_{\nu_1} \eta_{\nu_1} c_{\nu_1 i_1}\Big)}_{\xi_{i_1}} \wedge \underbrace{\Big(\sum_{\nu_2} \eta_{\nu_2} c_{\nu_2 i_2}\Big)}_{\xi_{i_2}} \wedge \dots}_{\text{к штук}}$$

$$= \sum_{\nu_1 \dots \nu_k} \eta_{\nu_1} \wedge \eta_{\nu_2} \wedge \dots \wedge \eta_{\nu_k} c_{\nu_1 i_1} \dots c_{\nu_k i_k}$$

$$= \sum_{L} \eta_L \cdot \sum_{g \in S_k} c_{l_{g(1)} i_1} c_{l_{g(2)} i_2} \dots c_{l_{g(k)} i_k} \cdot \operatorname{sgn}(g)$$

$$L = (l_1 < l_2 < \dots < l_k)$$

$$= \sum_{L} \eta_L c_{LI}$$

c_{LI} = det подматрицы в C, сосредоточенной в строках из L и столбцах из I.

$$(\xi_1 \dots \xi_n) = (\eta_1 \dots \eta_n) \cdot C$$

$$\xi_I = \sum_{L:\ \#L = k} \eta_L c_{LI}$$

$\binom{n}{k}$ грассмановых мономов ξ_I выражают-ся через грассмановы мономы η_L с k-ками C_{LI} = det $k\times k$-подматриц в C, живущих в строках L и столбцах I.

$$\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n = \eta_1\wedge\dots\wedge\eta \cdot \det C.$$

I и J таковы, что $\#I = k$, $\#J = n-k$.

$i_1,\dots i_k \qquad j_1,\dots,j_{n-k}$.

$$\xi_I\wedge\xi_J = \begin{cases} 0, \text{ если } I\cap J\neq\varnothing \\ \xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n\cdot \operatorname{sgn}(I) \end{cases}$$

если $J=\overline{I}$, т.е. $J\cap I=\varnothing$ и $J\cup \overline{I}=\{1,\dots n\}$

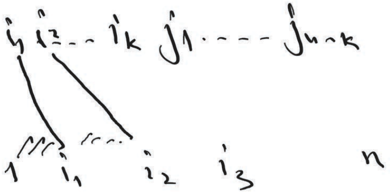
$$\operatorname{sgn}(I)=\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k})$$

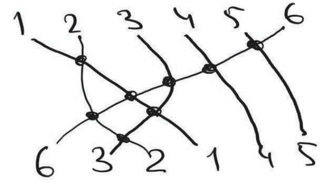
где $i_1<\dots<i_k$, $j_1<\dots<j_{n-k}$

$$\underset{\equiv}{i_1\dots i_k} \longleftrightarrow \underset{\equiv}{j_1\dots j_k}$$

тасующая перестановка.

правило ниточек:





чётность числа инверсных пар = = чётности числа пересечений

8 – чётно.

$$i_1-1+i_2-2+\dots+i_k-k = \sum i_\nu - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k}) = (-1)^{|I|+\frac{k(k+1)}{2}}$$

где $|I| = i_1+i_2+\dots+i_k$ – вес индекса I.

$$\xi_I \wedge \xi_J = \left[\begin{array}{l} 0, \quad J \neq \overline{I} \\ (-1)^{|I|+\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, \quad J = \overline{I} \end{array}\right.$$

сделать в этой формуле замену переменных $\xi = \eta \cdot C$

$$\Big(\sum_L \eta_L c_{LI}\Big) \wedge \Big(\sum_N \eta_N c_{NJ}\Big) =$$

$$= \sum_{L,N} \underbrace{\eta_L \wedge \eta_N}_{0,\ \text{если } N \neq \overline{L}} c_{LI} c_{NJ} =$$

$$= \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n \cdot \sum_{L} c_{LI} c_{\overline{L}J} \cdot (-1)^{|L| + \frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\|$$

$$\left[\begin{array}{l} 0, \text{ если } J \neq \overline{I} \\ \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n \cdot \det C \cdot (-1)^{|I| + \frac{k(k+1)}{2}} \end{array} \right.$$

Соотношение Лапласа: $\forall$ набора I из k столбцов матрицы C

$$\det C = \sum_{L:\ \#L = k} c_{LI} \cdot c_{\overline{L}\,\overline{I}} (-1)^{|L| + |I|}$$

Формула для разложения определителя по набору столбцов I.

Упражнение на понимание

$$\det(xA + yB) = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \cdot (\qquad)$$

$A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$, x, y – переменные.

что тут стоит?
