Лекция 26 ноября (первая половина)

Определители

K - комм. кольцо с единицей и без делителей нуля

M - свободный K-модуль, $\mathrm{rk}\, M = n$ $\quad M \simeq K^n$

$$\omega : \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n} \longrightarrow K$$

называется полилинейной кососимм. формой, если (1) линейна по каждому из n аргументов [полилинейность]

$$\omega(\ldots, \lambda u + \mu w, \ldots) = \lambda \omega(\ldots u \ldots) + \mu \omega(\ldots w \ldots)$$

на месте ... ничего не происходит.

(2) [кососимметричность]

$$\omega(\ldots u \ldots u \ldots) = 0$$

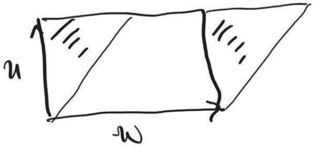
зануляется при совпадении любых двух аргументов $\Rightarrow$

$$0 = \omega(\ldots u + w \ldots u + w \ldots) = \cancelto{0}{\omega(\ldots u \ldots u \ldots)} + \cancelto{0}{\omega(\ldots w \ldots w \ldots)} + \omega(\ldots u \ldots w \ldots) + \omega(\ldots w \ldots u \ldots)$$

ω знакопеременна, т.е. $\omega(\ldots u \ldots w \ldots) = -\omega(\ldots w \ldots u \ldots)$

Пример: ориентир. объём в n-мерном векторном пр-ве над полем $\mathbb{k}$

$\omega : V\times\ldots\times V \longrightarrow \mathbb{k}$ объём параллелепипеда, если



(1) $\omega(\ldots u+\lambda w \ldots w \ldots) = \omega(\ldots u \ldots w \ldots)$

(2) $\omega(\ldots \lambda u \ldots) = \lambda\,\omega(\ldots u \ldots)$

Факт функции объёма — это в точности полилинейные кососимм. формы

$$V\times\ldots\times V \longrightarrow \mathbb{k}$$

Предложение: полилинейные кососимм. формы

$$\underbrace{M\times\ldots\times M}_{n} \longrightarrow K$$

на свободном модуле $\operatorname{rk} M = n$ образуют свободный модуль ранга 1.

Док-во: Выберем базис $e_1,\ldots,e_n$ в M и выразим $\omega(v_1,\ldots,v_n)$ $\forall v_1,\ldots,v_n \in M$

через $\omega(e_1,\dots,e_n)$.

$$(v_1,\dots,v_n)=(e_1,\dots,e_n)\cdot C$$

$$v_j=\sum_{i=1}^{n} e_i c_{ij}$$

$$\omega(v_1,\dots,v_n)=\omega\Big(\sum_{i_1} e_{i_1}c_{i_1 1},\sum_{i_2} e_{i_2}c_{i_2 2},\dots,\sum_{i_n} e_{i_n}c_{i_n n}\Big)$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_n}\underline{\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_n})}\cdot c_{i_1 1}c_{i_2 2}\cdots c_{i_n n}$$

$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\neq 0$ только если все i_ν различны, т.е. $(i_1,\dots,i_n)=(g(1),\dots,g(n))$

$$g:\{1,\dots,n\}\xrightarrow{\sim}\{1,\dots,n\}$$

перестановка.

Перестановки образуют группу преобразований S_n

$$\operatorname{sgn}(g)=\begin{cases}+1 & \text{если перестановка чётная}\\ -1 & \text{если перестановка нечётная}\end{cases}$$

$$=\omega(e_1,\dots,e_n)\underbrace{\sum_{g\in S_n}\operatorname{sgn}(g)\,c_{g(1)1}c_{g(2)2}\cdots c_{g(n)n}}_{\det C}$$

определитель матрицы C

$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \underline{\det C}$

Факт: $\det C$ полилинейная кососимм. функция от столбцов матрицы C

полилинейность очевидна из формулы

кососимм: пусть i-ый и j-ый столбцы совпадают, σ_{ij} – транспозиция i и j

$$\sigma_{ij} : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \to k \text{ при } k \neq i, j \end{cases}$$

$\underline{\underline{g}} \quad \underline{\underline{g\sigma_{ij}}} \qquad g_1\sigma_{ij} = g_2\sigma_{ij} \Leftrightarrow g_1, g_2$

слагаемые с g и $g\sigma_{ij}$ друг друга сокращают

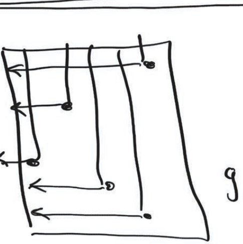
$\operatorname{sgn}(g) = -\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij})$

а произведения, отвечающие g и $g\sigma_{ij}$ одинаковые.

$\omega_e(v_1, \dots, v_n) = \det C$ ненулевая форма.

$\omega_e(e_1, \dots, e_n) = 1 \qquad \det E = 1 \quad \boxed{\begin{matrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix}}$

Зам: $\det C = \det C^t$



выбрать n элементов так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказался выбран ровно один элемент.

$$\det C^t = \sum_g \operatorname{sgn}(g^{-1})\, c_{g(1)1} \cdots c_{g(n)n}$$

$\operatorname{sgn}(g) = \operatorname{sgn}(g^{-1})$

$\shortparallel$

$g = \tau_1 \cdots \tau_k \qquad g^{-1} = \tau_k \cdots \tau_1$

$\tau_i \tau_i = \mathrm{Id}$

$\det C$ это полилинейная кососимм. функция от строк тоже

У линейных отображений $F: M \to M$ тоже есть определитель

Зафиксируем в M базис $e_1, \dots, e_n$

$$\omega_e(v_1, \dots, v_n) = \det C \qquad (v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n) \cdot C$$

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) := \omega_e(Fv_1, \dots, Fv_n).$$

ω_F - тоже полилинейная кососимм. форма.

$$\omega_F = \lambda \cdot \omega_e$$ для некоторого $\lambda \in K$

$\lambda := \det F$ и называется определителем линейного отображения F.

при выборе другого базиса $f_1, \dots, f_n$

$$\omega_f = \mu \omega_e \qquad \Rightarrow \omega'_F = \mu\omega_F$$

$$\omega'_F(v_1, \dots v_n) = \overset{\mu\omega_e}{\omega_f}(\underline{Fv_1 \dots Fv_n})$$

$$\omega'_F = \lambda' \omega_f \qquad \boxed{\lambda = \lambda'}$$

$$\mu\omega_F = \lambda' \mu \omega_e$$

оператор F умножает все полилин. кососим. ф-ии на одно и тоже число $\det(F)$.

$\forall$ П.К.Ф. ω $\forall v_1, \dots, v_n$

$$\omega(Fv_1, \dots, Fv_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \boxed{\det F}$$

число, не зависящее ни от ω ни от $v_1 \dots, v_n$

$\det F = \det F_e$, где F_e – матрица F в любом базисе $e_1, \dots, e_n$

$$(Fe_1, \dots, Fe_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot F_e$$

$$\omega(Fe_1, \dots, Fe_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det F_e$$

не зависит от выбора базиса

$$\underline{\det(AB)} = \underline{\det(A)} \cdot \underline{\det(B)}$$

$A : K^n \longrightarrow K^n$ A – матрица матрица

$x \longmapsto Ax$ этого отображения в стандартном базисе

$B : K^n \longrightarrow K^n$ B это матрица

$x \longmapsto Bx$ этого отображения в стандартном базисе

$$\omega(ABe_1, \dots ABe_n) = \det A\, \omega(Be_1, \dots, Be_n) = \\ = \det A \det B\, \omega(e_1, \dots, e_n)$$

Правила Крамера

$M \simeq K^n$, с базисом $(e_1, \dots, e_n)$ стандартный базис в K^n

векторы $v_1, \dots, v_n$ образуют базис в $M \iff$ матрица C_{ev} обратима.

$$(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n)\, C_{ev}$$

Как выразить произвольный вектор w через базис? Пусть $v_1, \dots v_n$ - образуют базис

$\det C_{ev} := \det(v_1, \dots, v_n)$ $\|$ определитель матрицы по столбцам которой стоят координаты векторов v_j

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

применить к обеим частям линейную функцию $K^n \to K$

$$u \mapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots v_n)$$

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) =$$

$$= \det(v_1, \dots, v_{i-1}, x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_{i+1}, \dots, v_n) =$$

$$= \sum_j x_j \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots v_n)$$

0 если $j \neq i$

$$= x_i \underbrace{\det(v_1, \dots v_n)}_{\text{обратим в } K}.$$

$$C_{ev} C_{ve} = E$$

$$\boxed{\det C_{ev}} \det C_{ve} = 1$$

обратим

Факт. Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ образуют базис, то $\det(v_1, \ldots, v_n)$ обратим в K и в разложении $w = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ произвольного вектора $w \in K^n$ по этому базису

$$x_i = \frac{\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)}{\det(v_1, \ldots, v_n)}$$