Лекция 19 ноября (вторая половина)

Пусть A – это ассоц. алгебра с единицей

$$a \in A \rightsquigarrow ev_a : \Bbbk[x] \longrightarrow A$$

$$f(x) \longmapsto f(a) \in A$$

$$f(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{f_0 \cdot x^0}}{f_0} + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

$$f(a) = f_0 a^0 + f_1 a + f_2 a^2 + \dots \in A.$$

$$a^0 \overset{def}{=} e.$$

если ev_a инъективен, т.е. $f(a) \neq 0 \ \forall f \neq 0$

степени $1, a, a^2, \dots$ линейно независимы над $\Bbbk$.

a наз. трансцендентным над $\Bbbk$.

(в этом случае $\dim_{\Bbbk} A = \infty$)

если $\ker ev_a \neq 0$, то a наз. алгебраическим над $\Bbbk$

$$\begin{matrix} \ker ev_a \\ \cap \\ \Bbbk[x] \end{matrix} \qquad \exists f \in \Bbbk[x],\ f \neq 0$$

идеал. $(\mu_a(x))$ $\qquad f(a) = 0$

приведённый многочлен минимальной степени, для которого $\mu_a(a)=0$.

$\mu_a(x)$ наз. минимальным многочленом эл-та a

он делит любой f : $f(a)=0$

$\dim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k}) = n^2 < \infty$

все матрицы алгебраичны над $\mathbb{k}$.

$$\underbrace{E, A, A^2, \dots, A^{n^2}}_{n^2+1} \text{ — линейно зависимы}$$

$$\boxed{\lambda_0 E + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0}$$

$a \in A$ наз. нильпотентным, если $a^n=0$ для некоторого n

a — нильпотент

$ev_a : \mathbb{k}[[x]] \longrightarrow A$ корректно определено.

$\sum f_i x^i \longrightarrow \sum f_i a^i \leftarrow$ конечна

$i \geqslant 0$ $\qquad$ $i \geqslant 0$

определены $\underline{e^a}$ $\quad \underline{\ln(1+a)}$ $\quad \underline{(1+a)^\lambda}$ $\forall \lambda \in \Bbbk$

между ними есть все нужные тождества

$$\left((1+a)^{1/2}\right)^2 = 1+a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2020} = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}\Bigg)^{2020} =$$

$e_1 \to 0$

$e_2 \to e_1$

$$= E + 2020\, E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}^2 = 0$$

$\underline{\text{Упр:}}$ подберите X: $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Как векторное пр-во над $\Bbbk$ алгебра $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ порождается $\underline{\text{стандартным}}$ $\underline{\text{базисом}}$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\textcircled{1}} \\ 0 & 0 \end{array}\right) & i \\ j & \end{array}$$

$$A = (a_{ij}) = \sum a_{ij} E_{ij}$$

$$E_{ij}E_{kl} = \left[\begin{array}{l} 0, \ k \neq j \\ E_{il}, \ k = j \end{array}\right. \qquad \boxed{\begin{array}{l} E_{ij} : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \\ e_k \longmapsto \begin{cases} e_i, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \end{array}}$$

В гораздо большей общности можно рассматривать $\mathrm{Mat}_n(R)$, где R - любое кольцо (не обязательно коммутативное).

R наз. кольцом, если на R есть сложение и умножение, по сложению R явл. абелевой группой, а умножение

ассоциативно $(ab)c = a(bc)$

дистрибутивно $(a+b)c = ac+bc$

$a(b+c) = ab+ac$

и имеет единицу

$\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a$

$\mathrm{Mat}_n(R)$ — тоже кольцо $\forall$ кольца R.

Таблица умножения матриц E_{ij} та же самая.

Пример: Любая верхняя унитреугольная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ij})$

$a_{ij} = 0$ при $i > j$

$a_{ii} = 1 \ \forall i$

обратима над любым кольцом.

$$A = \sum_{i \le j} a_{ij} E_{ij} = E + N$$

где $N = \sum_{i<j} a_{ij} E_{ij}$

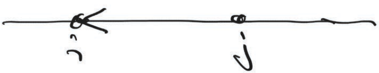
$$\begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

N – это нильпотентная матрица.

$$N^k \quad \underbrace{\Big(\sum_{i<j} a_{ij} E_{ij}\Big) \cdot \Big(\sum_{i<j} a_{ij} E_{ij}\Big) \cdot \ldots}_{k}$$

как устроено произведение k сомножителей $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \ldots E_{i_k j_k}$

E_{ij}



$E_{ij} E_{kl} = 0 \quad j \ne k$

E_{il} при $j = k$

коэф-т при E_{ij} в N^k равен

$$\sum_{i<\nu_1<\dots<\nu_{k-1}<j} \overbrace{a_{i\nu_1} a_{\nu_1\nu_2} \cdots a_{\nu_{k-1}j}}^{k}$$

(все возможные k-шаговые траектории из j в i

1 n

$N^k=0$ при $k \geq n$

$$(b_{ij}) = (E+N)^{-1} = E - N + N^2 - N^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$x = N$

$$b_{ij} = -a_{ij} + \sum_{i<\nu<j} a_{i\nu} a_{\nu j} - \sum_{i<\nu_1<\nu_2<j} a_{i\nu_1} a_{\nu_1\nu_2} a_{\nu_2 j} + \dots$$

Вернуться к листу про обращение Мёбиуса

Стандартное приложение:

теорема об элементарных симм. функциях

$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ наз. симм.

если $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)})$

$\forall$ биекции $g : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$

симм.

$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ нес.

Симм. многочлены образуют $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Базис: $m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}} +$

все различные мономы, которые можно получить перестановками.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

λ пробегает диаграммы Юнга

Теорема: Мономы от элементарных симметрических многочленов тоже составляют базис

$\sigma_i(x_1, \dots, x_n) =$ сумма всех произведений из i различных букв $x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_i}$

$\sigma_0 = 1$

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_{13} + \dots = \sum_{i \neq j} x_i x_j$

$$\sigma_i = \sum_{\substack{\nu_1 \dots \nu_i \\ \text{попарно} \\ \text{различн.}}} x_{\nu_1} \dots x_{\nu_i}$$

$\sigma_1^{m_1} \dots \sigma_n^{m_n}$ — моном.

Любой симм. многочлен единственным образом записывается как многочлен от элементарных симметрических.

$\boxed{\sigma_{\mu_1} \sigma_{\mu_2} \dots \sigma_{\mu_m}}$ $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$

вместо мономов $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$

$$\underbrace{x_n x_n \dots x_n}_{m_n} \underbrace{x_{n-1} \dots x_n}_{m_{n-1}}.$$

x^m x_k

$(m_1, \dots, m_n)$ $x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_s}$ $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s$

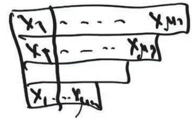
$x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$

мономы от σ_i тоже можно нумеровать диаграммами Юнга

$$\sigma_\mu = \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2} \cdots \sigma_{\mu_m}$$

μ пробегает диаграммы Юнга

σ_μ выражаются через базис m_λ при помощи верхней треугольной матрицы (если диаграммы правильно упорядочить.

$\mu =$ 

$x_1 x_2 \cdots x_{\mu_1}$

$x_1 x_2 \cdots x_{\mu_2}$

лексикографически старший моном от x в $\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2} \cdots$

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_m}$$

λ_1 - высота 1-го столбца диаграммы μ

λ_2 - высота второго столбца ...

$$\sigma_\mu = x^\lambda + \text{лексикограф. младшие члены}$$

где $\lambda = \mu^+$ транспонированная к μ (строка нарисована по столбцам).

упорядочиваем σ_μ по лексикограф. убыванию диаграмм μ^+

упор. λ по лексикогр.
убыванию

$$\sigma_\lambda = X^\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * & & \\ & \ddots & * & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

они обратимы над $\mathbb{Z}$
столбцы образуют базис !