Лекция 22 октября (первая половина)

Числа в степенной ряд $f \in \mathbb{Q}[[t]]$ подставлять непонятно как (объяснение см. в курсе мат. анализа).

Пример: Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{Q}[x]$ и линейный оператор дифф-я:

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x],\ g(x) \mapsto g'(x),$$

В ряд $f(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ можно подставить $t = \frac{d}{dx}$, получим линейное отображение

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$$

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) = a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \dots$$

Для $h \in \mathbb{Q}[x]$ $\quad f\left(\frac{d}{dx}\right) h(x) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$= \underbrace{a_0 h(x) + a_1 h'(x) + a_2 h''(x) + \dots}_{\text{сумма конечна,}}$$

т.к. $\left(\frac{d}{dx}\right)^N h = 0$ при $N > \deg h$

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)[\alpha h + \beta g] = \alpha f\left(\frac{d}{dx}\right) h + \beta f\left(\frac{d}{dx}\right) g$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q},\ \forall g, h \in \mathbb{Q}[x]$$

Пример: $f(t) = e^t$ Как действует $e^{d/dx}$?

$$e^{d/dx} = \underbrace{1 + \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots}\ \cdot x$$

$$1 \mapsto 1$$

$$x \mapsto x + 1$$

$$x^2 \mapsto x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$x^3 \to x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

Упр.: $x^k \mapsto (x+1)^k$ проверить!

$$e^{d/dx} : g(x) \to g(x+1)$$

оператор сдвига аргумента.

$$e^{\alpha d/dx} = 1 + \alpha \frac{d}{dx} + \alpha^2 \frac{d}{dx^2} + \dots$$

$1 \mapsto 1 \quad x \to x + \alpha \quad x^2 \to x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = (x+\alpha)^2$

$$e^{\alpha \frac{d}{dx}} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x] : g(x) \mapsto g(x+\alpha)$$

сдвиг аргумента на α.

$$e^{-d/dx} : g(x) \to g(x-1)$$

Замечание: Все операторы $f\left(\frac{d}{dx}\right)$ коммутируют друг с другом, потому что сопоставление $f \mapsto f\left(\frac{d}{dx}\right)$ это гомоморфизм $\mathbb{Q}$-алгебр: линейное отображение, переводящее произведение рядов в композицию операторов $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$

$$ev_{d/dx} : \mathbb{Q}[[t]] \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}[x]$$

линейные эндоморфизмы $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ — векторное пр-во над $\mathbb{Q}$

$\mathrm{im}\,(ev_{d/dx}) =$ "разностные операторы" $=$

$=$ операторы, коммутирующие со сдвигами аргумента.

Пример использования: найдём многочлен

$$S_{m+1}(x) : \underbrace{0^m + 1^m + 2^m + \dots + n^m}_{\text{сумма } n\text{-тых степеней}} = \underbrace{S_{m+1}(n)}_{\text{многочлен степени } m+1}$$

$$0^0 + 1^0 + \dots + n^0 = n$$

$$0^1 + 1^1 + \dots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \text{кубический многочлен}$$

$$\nabla : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x] \quad g(x) \mapsto g(x) - g(x-1)$$

"оператор нижней разности" $\nabla S_{m+1}(x) = x^m$

Если мы найдём многочлен $S_{m+1}(x)$:

$$\nabla S_{m+1}(x) = S_{m+1}(x) - S_{m+1}(x-1) = x^m$$

и такой что $S_{m+1}(0) = 0$ (т.е. без свободного члена), то

$$S_{m+1}(1) = S_{m+1}(0) + \nabla S_{m+1}(1) = 0^m + 1^m$$

$$S_{m+1}(2) = S_{m+1}(1) + \nabla S_{m+1}(2) = 0^m + 1^m + 2^m$$

$$\dots$$

$$S_{m+1}(n) = 0^m + 1^m + \dots + n^m$$

Надо решить уравнение

$$\boxed{\nabla S_{m+1} = x^m}$$

$$\nabla : g(x) \to g(x) - g(x-1) = \left(1 - e^{-d/dx}\right) g(x)$$

$$\nabla = 1 - e^{-d/dx}$$

если $\exists \nabla^{-1} : \nabla^{-1} \nabla = \mathrm{Id}$

$$S_{m+1} = \nabla^{-1} x^m$$

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2} t^2 \dots$$

$$1 - e^{-t} = \frac{1 - e^{-t}}{t} \cdot t$$

этот ряд обратим в $\mathbb{Q}[[t]]$

Обратный ряд называется ряд Тодда

$$td(t) := \frac{t}{1 - e^{-t}}$$

$$\nabla S_{m+1} = x^m$$

$$td^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx} S_{m+1} = x^m$$

$$\downarrow td\left(\frac{d}{dx}\right)$$

$$S'_{m+1}(x) = td\left(\frac{d}{dx}\right) x^m$$

$$S_{m+1}(x) = \int_0^x \underbrace{td\left(\frac{d}{dx}\right)} \cdot x^m$$

можно вычислить любое число коэфф-тов

Задание на дом: получить явные формулы для сумм 2х 3х 4х 5х степеней

$$td(t) = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{2} t^2 + \frac{b_3}{6} t^3 =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} t^k$$

$$\boxed{td(t)(1 - e^{-t}) = t}$$

отсюда b_k находятся

b_k называются Числами Бернулли.

Терминолог. замечание: традиционно первое число Бернулли это $-b_1$ а не b_1

(Бернулли использовал вместо ∇ оператор $\Delta : g(x) \to g(x+1) - g(x)$ $\quad \frac{t}{e^t - 1}$