Лекция 15 октября (вторая половина)

Пример: числа Фибоначчи. $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

$$\underbrace{a_0 = a_1 = 1}, \quad \underbrace{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}_{\text{при } n \geq 2}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \overset{?}{=} \frac{?}{1 - x - x^2}$$

$$(1 + x + a_2 x^2 + \dots)(1 - x - x^2) =$$

$$= 1 + 0 \cdot x + \text{все сократится}$$

a_i — коэфф-ты разложения в ряд функции

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \boxed{\frac{\beta_+}{1 - \alpha_+ x} + \frac{\beta_-}{1 - \alpha_- x}}$$

$$\| $$

$$(1 - \alpha_+ x)(1 - \alpha_- x)$$

α_+, α_- — это корни мн-на $t^2 - t - 1$

$$\boxed{\alpha_+ - \alpha_- = \sqrt{5}} \qquad \alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$1 = \beta_+ (1 - \alpha_- x) + \beta_- (1 - \alpha_+ x)$$

$$x = \alpha_-^{-1} \qquad 1 = \beta_- \left(1 - \frac{\alpha_+}{\alpha_-}\right) \qquad \beta_- = \frac{\alpha_-}{\alpha_- - \alpha_+} = -\frac{\alpha_-}{\sqrt{5}}$$

$$x = \alpha_+^{-1} \qquad 1 = \beta_+ \left(1 - \frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right)$$

$$\beta_+ = \frac{\alpha_+}{\sqrt{5}}$$

a_n – к-т при t^n у $\dfrac{\beta_+}{1-\alpha_+ x} + \dfrac{\beta_-}{1-\alpha_- x}$

$$a_n = \beta_+\alpha_+^n + \beta_-\alpha_-^n = \frac{\alpha_+^{n+1} - \alpha_-^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Общий ответ: Пусть надо решить

лин. уравнение $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$

$$\underline{a_n} = c_1 \underbrace{a_{n-1} + \dots + c_k a_0}$$

шаг1: найти корни мн-на

$$t^n - c_1 t^{n-1} - \dots - c_k = \underline{\prod (t-\alpha_i)^{m_i}}$$

где α_i – все различные корни

Шаг2: Найти $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$

$$\frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k} = a_0 + a_1 x + \dots$$

это первые k членов произведения

$$(1 + c_1 x + \dots)\underbrace{(a_0 + a_1 x + \dots}_{k-1 \text{ членов должны быть даны}})$$

Шаг 3: $$\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{k-1}x^{k-1}}{1+c_1x+c_2x^2+\ldots}=$$

$$=\sum\frac{\beta_i}{(1-\alpha_ix)^{m_i}}$$ надо найти β_i

Шаг 4: разложить в ряд

$$\frac{1}{(1-\alpha_ix)^{m_i}}=1+\alpha_ix\cdot\binom{-m_i}{1}+$$
$$+\alpha_i^2x\cdot\binom{-m_i}{2}+\ldots$$

Общий вид решения — это сумма геометрических прогрессий, умноженных на многочлены: решениями уравнения

$$a_n=c_1a_{n-1}+\ldots+c_ka_{n-k}$$

являются последовательности вида $a_n=\alpha^n\varphi(n)$ где

α — корень многочлена
$$t^k-c_1t^{k-1}-\ldots-c_k$$

а φ – это многочлен от x, степени, строго меньшей, чем кратность корня α.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}^{k}}{\underbrace{k(k-1)\dots}_{k}}$$

а $\alpha \in \Bbbk$. Как придать этому смысл в $\Bbbk[x]$ под любым полем $\Bbbk$?

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

это единственный ряд со свободным членом $\underline{1}$: $f' = f$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$ka_k = a_{k-1} \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{k!}}$$

$\ln(1+x)$ – первообразная от $\frac{1}{1+x}$

такой ряд без свободного члена,

тк $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$

$$\boxed{\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

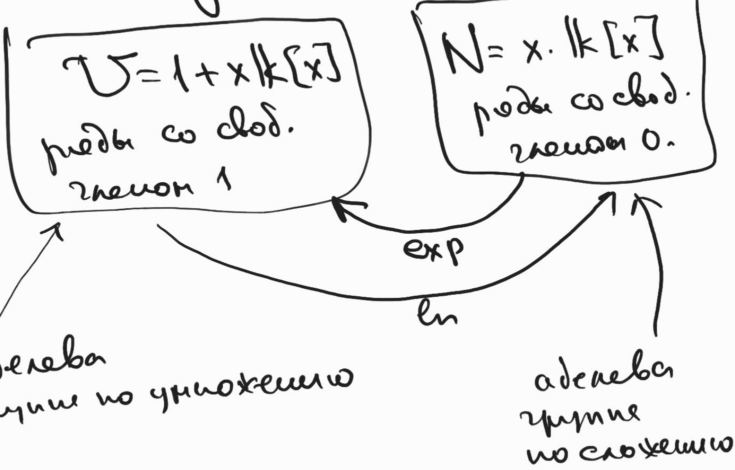
если подставить вместо x любой ряд без свободного члена, то мы получим хорошо определённый $\ln(f(x))$ ∀ любого ряда $f(x)$ со свободным членом 1

$$\ln(f(x)) = \ln\Big(1 + \underbrace{\text{ряд без}}_{\text{своб. член}}\Big)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$x \leftarrow g(x)$ где у $g(x)$ нет свободного члена

$e^{g(x)}$ хорошо определена ∀ ряда $g \in x\cdot\Bbbk[[x]]$



Теорема Отображения exp и ln — это взаимно-обратные изоморфизмы абелевых групп, т.е.

$$e^{\ln u} = u \quad \forall u \in \underline{1+x\Bbbk[x]}$$

$$\ln e^{v} = v \quad \forall v \in \underline{\underline{x\Bbbk[x]}}$$

$$e^{v_1+v_2} = e^{v_1}e^{v_2} \quad \forall v_1, v_2 \in x\Bbbk[x]$$

$$\ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2) \quad \forall\, u_1, u_2 \in 1 + x\Bbbk[x]$$

$f = g \iff f' = g'$ если $f, g \in x\Bbbk[x]$
или $f, g \in 1 + x\Bbbk[x]$

$a_n = b_n \iff n a_n = n b_n$

Всюду считаем что $\operatorname{char} \Bbbk = 0$

$u \in 1 + x\Bbbk[x]$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$u, w \in 1 + x\Bbbk[x]$

$$\frac{u'}{u} = \frac{w'}{w}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{u}{w}\right)' \cdot \frac{w}{u} = \frac{u'w - w'u}{uw} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{u}{w} = \mathrm{const} \Rightarrow u = w$$

Следующие условия на ряды u и w из $1 + x\Bbbk[x]$ эквивалентны:

$$\begin{tikzcd}
u = w \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & u' = w' & \ln(u) = \ln(w) \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \frac{u'}{u} = \frac{w'}{w} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e^{\ln u} = u \arrow[d, "d\ln(*)"] \\ \frac{(e^{\ln u})'}{e^{\ln u}} \overset{?}{\ } \frac{u'}{u} \end{tikzcd}$$ $\forall u \in 1 + x\Bbbk[x]$

$$\frac{e^{\ln u} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'}{e^{\ln u}} = \frac{u'}{u}.$$

$$\begin{tikzcd} \ln e^{w} = w \arrow[d, "d/dx"] \\ \frac{1}{e^{w}} e^{w} w' = w' \end{tikzcd}$$ $\forall w \in x\Bbbk[x]$

т.е. e^{u} и $\ln(w)$ обратные отображения

Гомоморфность:

$$\begin{tikzcd} \ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2) \arrow[d, "d/dx"] \\ {} \end{tikzcd}$$

$$\frac{u_1'u_2+u_1u_2'}{u_1u_2} = \frac{(u_1u_2)'}{u_1u_2} \quad v \quad \frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}$$

равны!

Степенная функция

$$(1+x)^\alpha := e^{\alpha \ln(1+x)}$$

определено $\forall \alpha \in \Bbbk$ над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль!

$f(x)^\alpha$ определено $\forall$ ряда $f \in 1 + x\Bbbk[x]$

обладает всеми привычными св-вами степенной функции

$$f_1^\alpha \cdot f_2^\alpha = (f_1f_2)^\alpha \qquad f^\alpha f^\beta = f^{\alpha+\beta}$$

доказать дома.

$$(f^\alpha)^\beta = f^{(\alpha\beta)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(f_1 f_2)^\alpha &= e^{\alpha \ln(f_1 f_2)} = e^{\alpha \ln f_1 + \alpha \ln f_2} \\ &= e^{\alpha \ln f_1} \cdot e^{\alpha \ln f_2} = f_1^\alpha \cdot f_2^\alpha\end{aligned}}$$

$(1+x)^\alpha = A(x)$ как найти коэфф-ты?

$$\frac{d}{dx} \ln(A(x)) = \frac{A'(x)}{A(x)}$$

$$A(x) = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha \ln(1+x)\right) = \frac{\alpha}{1+x} \qquad \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$$

$$(1+x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots) = \alpha(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

при x^{m-1} $\quad m a_m + (m-1) a_{m-1} = \alpha a_{m-1}$

$$m a_m = (\alpha - m + 1) a_{m-1}$$

$$a_m = \frac{\alpha - m + 1}{m} a_{m-1} =$$

и т.д.

$$= \frac{\alpha-m+1}{m}\,\frac{\alpha-m+2}{m-1}\,a_{m-2} =$$

$$= \frac{\overbrace{(\alpha-m+1)\ldots\alpha}^{m}}{m!}\cdot \cancel{a_0}\ 1$$

$$a_m = \binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}$$

Формула Бинома:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

ряд Лорана $\boxed{a_{-m}t^{-m} + \ldots} + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1 t + \ldots$

имеет начало, возможно с отрицательной степени

$\longrightarrow$ туда и обычный

главная часть ряда Лорана

и бывает сколь угодно большим