Содержание

Лекция 1: Поля 6
§1. Определение и примеры полей . . . 6
-подполя и расширения . . . 8
-расширения поля $\mathbb{Q}$ . . . 8
-мнимые числа . . . 9
§2. Комплексные числа . . . 10
-геометрическое определение поля $\mathbb{C}$ . . . 11
-раскрытие скобок и алгебраическая запись формул . . . 12
-тригонометрические тождества . . . 14
-уравнение деления круга . . . 15
-гомоморфизмы полей . . . 15

Лекция 2: Коммутативные кольца 18
§1. Определение и примеры коммутативных колец . . . 18
-гауссовы целые числа . . . 19
-кольца многочленов и формальных степенных рядов . . . 20
-кольца функций . . . 22
-кольцо вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. . . . 23
§2. Факторизация . . . 24
-корректность индуцированной фактор-структуры . . . 24
-фактор по идеалу . . . 25
§3. Примеры идеалов . . . 26
-$\mathbb{Z}$ является кольцом главных идеалов . . . 26
-НОД и взаимная простота в кольце $\mathbb{Z}$ . . . 27
-простые и максимальные идеалы . . . 28
§4. Примеры гомоморфизмов . . . 28
-гомоморфизмы поднятия и вычисления . . . 28
-гомоморфизм факторизации . . . 29
-простое подполе и характеристика . . . 29
-гомоморфизм Фробениуса . . . 30
-строение гомоморфизмов . . . 31
-прямая сумма колец . . . 32
-китайская теорема об остатках . . . 32

Лекция 3: Делимость и многочлены 33
§1. Кольца главных идеалов. . . . 33
-деление с остатком . . . 33
-$k[x]$ — область главных идеалов . . . 33
-евклидовы кольца . . . 34
-ассоциированные элементы . . . 34
-НОД . . . 34
-алгоритм Евклида . . . 35
-китайская теорема об остатках . . . 35
-простота и неприводимость . . . 36
§2. Многочлены и их корни . . . 37
-корни . . . 38
-производный многочлен . . . 39
-сепарабельность . . . 40
-минимальный многочлен . . . 40
-присоединение корня . . . 41
-алгебраические расширения полей . . . 42
§3. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами . . . 42
-лемма Гаусса . . . 42
-разложение многочленов из $\mathbb{Z}[x]$ на множители над полем $\mathbb{Q}$ . . . 44
-критерий Эйзенштейна . . . 44
-разложение над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ . . . 45
§4. Факториальность . . . 46
-нётеровость . . . 46
-однозначность разложения . . . 47

Лекция 4: Линейные уравнения и матрицы 49
§1. Основные понятия . . . 49
-уравнения . . . 49
-матрицы . . . 50
§2. Метод Гаусса над полем . . . 50
-элементарные преобразования строк . . . 51
-строгий ступенчатый вид . . . 51
-решение системы линейных уравнений над полем . . . 52
§3. Алгебра матриц . . . 53
-линейные замены переменных . . . 54
-свойства действий над матрицами . . . 55
-элементарные преобразования столбцов . . . 58
-обратная матрица . . . 58
-отыскание обратной матрицы над полем . . . 59
§4. Метод Гаусса над евклидовым кольцом . . . 60
-обратимые элементарные преобразования . . . 60
-строгий диагональный вид . . . 60

Лекция 5: Язык векторов 63
§1. Координатные пространства . . . 63
-векторное координатное пространство . . . 64
-аффинное координатное пространство . . . 64
-примеры из аффинной геометрии . . . 64
-векторные подпространства и однородные линейные уравнения . . . 65
-аффинные подпространства и неоднородные линейные уравнения . . . 66
§2. Модули . . . 66
-определение модуля . . . 66
-векторные пространства . . . 67
-абелевы группы ($\mathbb{Z}$-модули) . . . 67
-примеры векторных пространств и модулей . . . 68
§3. Образующие, базисы и линейная зависимость. . . . 70
-системы образующих . . . 70
-базисы и координаты . . . 70
-линейная зависимость . . . 70
-кручение . . . 70
-конечно порождённые свободные модули. . . . 71
-гомоморфизмы и соотношения . . . 71
-теоремы о базисах конечномерных векторных пространств . . . 72
§4. Матричный формализм . . . 74
-вектор-столбцы и вектор-строки . . . 74
-матрицы перехода . . . 75
-матрицы гомоморфизмов . . . 76
-ранг матрицы . . . 78

Лекция 6: Определители 80
§1. Форма объёма . . . 80
-линейная зависимость и объём . . . 81
-геометрические свойства объёма . . . 81
-ориентация . . . 81
-алгебраические свойства формы объёма . . . 82
§2. Полилинейные косые формы . . . 83
-полилинейность, знакопеременность и кососимметричность . . . 83
-перестановки . . . 84
-чётность, знак и правило ниточек . . . 85
-преобразование косой формы при линейной замене координат . . . 86
-определитель матрицы . . . 86
-существование и единственность формы объёма . . . 88
§3. Свойства определителей. . . . 88
-определитель транспонированной матрицы . . . 89
-мультипликативные свойства определителя . . . 89
-невырожденные матрицы . . . 90
-правило Крамера . . . 90
-результант и дискриминант . . . 91
-выражение $R(f,g)$ через f и g . . . 92

§4. Соотношения Лапласа. 94
-мультииндексы, подматрицы и миноры 94
-внешние степени матрицы 94
-разложение определителя по набору строк (столбцов) 94
-присоединенная матрица 97
-разложение оператора умножения на определитель 98
-тождество Гамильтона - Кэли 98

Лекция 7: Строение некоторых модулей 100
§1. Некоторые конструкции с модулями 100
-прямые суммы модулей 100
-дополнительные подмодули 101
-фактор-модули 101
-строение гомоморфизмов 102
-сизигии 103
-факторизация прямых сумм 103
§2. Конечно порождённые модули над кольцом главных идеалов 104
-теорема о взаимных базисах 105
-теорема об инвариантных множителях 106
-элементарные делители 107
-отщепление кручения 108
-строение конечно-порождённых абелевых групп 109
-целозначные многочлены 109

Лекция 8: Алгебраические функции 111
§1. Многочлены от многоих переменных 111
-лексикографическое упорядочение мономов 111
-метод “сравнения соответственных мономов” 112
-формулы Виета 113
-разложение результанта и дискриминанта 113
§2. Симметрические многочлены 115
-разбиения и диаграммы Юнга 115
-мономиальные симметрические полиномы 116
-переход от мономиальных полиномов к элементарным 116
-основная теорема о симметрических функциях 117
§3. Рациональные функции 118
-разложение на простейшие дроби 118
-поле частных целостного кольца 120
-поле рядов Лорана 120
-факториальность кольца многочленов 120
§4. Разложение алгебраической функции в дробно-степенной ряд 121
-неявные алгебраические функции 121
-ряд Пюизо 122
-лемма Гензеля 122

Лекция 9: Формальные функции 125
§1. Экспонента, логарифм, бином . . . 125
-формальные операции над формальными рядами . . . 125
-экспоненты, логарифмы и логарифмические производные . . . 126
-степень с произвольным показателем . . . 128
-бином Ньютона . . . 129
§2. Разностные операторы на кольце многочленов . . . 129
-действие $k[[d/dx]]$ на $k[x]$ . . . 130
-формула Тейлора . . . 130
-числа и многочлены Бернулли . . . 131
-формулы суммирования степеней . . . 132
-характеризации разностных операторов . . . 133
§3. Производящие функции . . . 134
-метод производящих функций . . . 134
-числа Каталана . . . 134
-производящие функции симметрических многочленов . . . 135

Лекция 10: Группы 137
§1. Что такое группа . . . 137
-эндоморфизмы и симметрии . . . 137
-опроеделение группы . . . 138
§2. Примеры групп . . . 139
-подгруппы . . . 139
-перестановки и подстановки . . . 139
-группа Галуа . . . 139
-группы многогранников . . . 141
-смежные классы и теорема Лагранжа . . . 142
-порядок и индекс . . . 142
-циклические группы . . . 142
§3. Действие группы на множестве . . . 143
-орбиты и стабилизаторы . . . 143
-нормальные подгруппы . . . 144
§4. Факторизация . . . 144
-корректность группового закона на факторе . . . 144
-строение гомоморфизмов . . . 145
§5. Симметрические группы . . . 146
-изоморфизмы с группами многогранников . . . 146
-циклы и цикловой тип . . . 147
-знакопеременные подгруппы . . . 148
-строение группы $\mathfrak{A}_5$ . . . 148
-простота знакопеременных групп . . . 149
Указатель терминов . . . 150