Лекция 6
Определители

▷Ориентированный объём n-мерного параллелепипеда ▷Полилинейность, знакопеременность, кососимметричность ▷Знак перестановки ▷Описание полилинейных косых форм на свободном модуле ▷Определитель матрицы ▷Правило Крамера ▷Миноры и формулы Лапласа ▷Присоединенная матрица ▷Явная формула для обратной матрицы ▷Тождество Гамильтона-Кэли

§1. Форма объёма

1.1. Алгебраическая мотивировка. Когда мы решаем однородную систему линейных уравнений $Ax = 0$ методом Гаусса, вопрос о том, имеет ли она ненулевые решения, как правило, остаётся открытым вплоть до самого последнего шага. В этой лекции мы построим некий универсальный многочлен от элементов квадратной матрицы, значение которого на конкретной матрице A показывает, обратима ли она, и если да, то позволяет написать явную формулу для решения неоднородной системы $Ax = b$.

Для того чтобы судить о том, что будет на выходе каго-либо процесса, глядя на то, что подаётся на вход, надо, как известно, придумать *инвариант* этого процесса — нечто не меняющееся в ходе процесса и различающее конечные состояния. Чтобы построить многочлен, инвариантный относительно тех или иных алгебраических преобразований, следует обратиться к геометрии, ибо неинвариантность алгебраических выражений связана, как правило, с тем, что они неуклюже кодируют некую геометрическую картину, привлекая для этого избыточные данные: систему координат, неоднозначую запись и т. п. Независимость выражения от произвола в выборе этих данных (в частности, его инвариантность относительно их допустимых преобразований) означает, что это выражение является *геометрической величиной*. Итак, нам предстоит связать с каждой матрицей геометрическую величину.

Столбцы квадратной $(n \times n)$-метрицы над полем k можно воспринимать как некоторый набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ координатного пространства k^n. Фигура, связанная с набором из n векторов — это натянутый на них параллепипед (см. рис.1 для $n = 3$). Геометрическая величина, ассоциированная с параллелипипедом, — это его объём. Объём как нельзя более подходит для того, чтобы выяснить, является ли набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ линейно зависимым[1], а это то же самое что проверить обратима ли соответствующая матрица.

[1] линейная зависимость векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset k^n$ равносильна тому, что они лежат в одной $(n-1)$-мерной гиперплоскости, а в этом случае натянутый на них параллепипед “уплощается” в фигуру нулевого объёма

Задача 6.1. Убедитесь, что следующие свойства набора из n векторов v_i в k^n равносильны друг другу:

а) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — базис в k^n;

б) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — линейно независим;

в) матрица перехода C_{ev} от v_i к стандартному базису e_i в k^n обратима.

Мы не будем в этий лекции детально объяснять, что такое "объём тела в n-мерном пространстве" (переложив эту почётную обязанность на могучие плечи математического анализа). Вместо этого мы сначала выясним (про себя) какие интуитвные свойства объёма n-мерного параллелипипеда нам хотелось бы иметь, затем сформулируем их в виде аксиом и проверим, что удовлетворяющая этим аксиомам *форма объёма* существует и единственна (мы найдём для неё явное алгебраическое выражение).

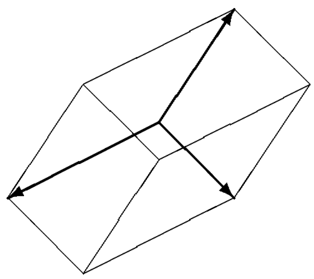

Рис. 1. Параллелепипед, натянутый на векторы

1.2. Геометрические свойства объёма. Обозначим искомую функцию объёма через

$$Vol\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

Во-первых, мы фиксируем единицу измерения: будем считать, что объём параллелипипеда, натянутого на стандартный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в k^n равен единице:

$$Vol\,(e_1, e_2, \ldots, e_n) = Vol\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \overset{\text{def}}{=} 1\,.$$

Во-вторых, ясно что $Vol\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ не изменяется, когда к одному из векторов v_i прибавляется кратность кокого-либо другого вектора v_j. Проекция того, что при этом происходит, на 2-мерную плоскость, порождённую векторами v_i и v_j показана на рис.2. Читателю предлагается представить себе всю n-мерную картинку и увидеть, что кусок, который при этом отрезается от параллелипипеда равен куску, который прикладывается к нему с другой стороны (ибо эти куски получаются друг из друга параллельным переносом).

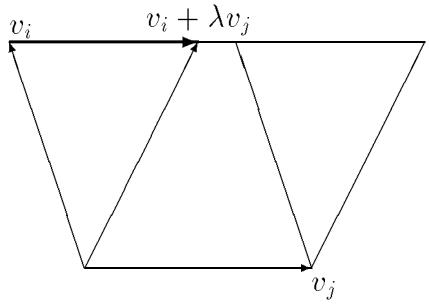

Рис. 2. Объём не меняется при перекосе

Третье свойство является наиболее тонким. Интуитивно, над полем $k = \mathbb{R}$ при увеличении одной из сторон в λ раз ($\lambda > 0$) объём также должен увеличиваться в λ раз. Над произвольным полем k условие $\lambda > 0$ теряет смысл, и естественно потребовать, чтобы объём был просто однороден по каждому аргументу: $Vol\,(\ldots\ \lambda v\,,\ \ldots) = \lambda Vol\,(\ldots\ v\,,\ \ldots)\quad \forall\,\lambda \in k$ (здесь и во всех последующих подобных формулах многоточими обозначены аргументы, которые при переходе от левой части равенства к правой переписываются без изменений).

При $k = \mathbb{R}$ это приведёт к тому, что у некоторых параллелипипедов будет *отрицательный* объём: смена знака одного из векторов будет менять знак и у объёма. Так, при $n = 1$

стандартная длина вектора x – это *модуль* $|x|$, тогда как однородная длина — это линейная функция $Vol(x) = x$. Помимо того, что вторая намного удобнее первой в вычислениях, она дополнительно улавливает *ориентацию*, ибо векторы отрицательной длины — это в точности векторы, ориентированые противоположно стандартному базисному вектору. Многомерный однородный объём на $\mathbb{R}^n$ также учитывает *ориентауию набора векторов* и поэтому называется *ориентированным объёмом.*

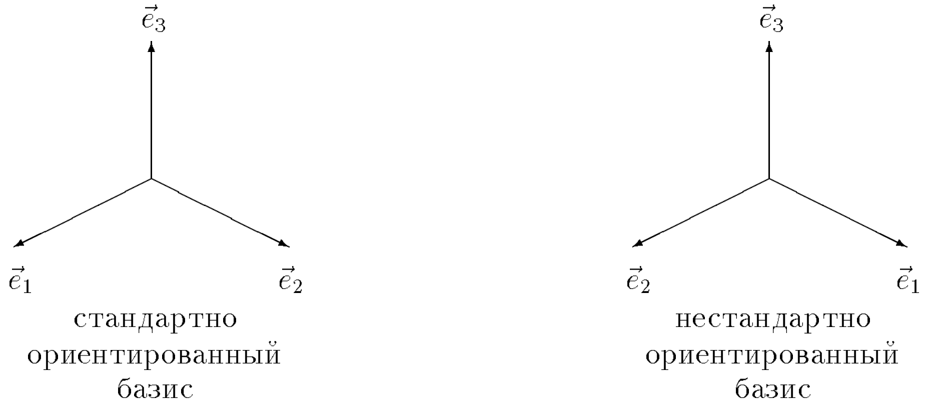

Рис. 3. Две возможных ориентации базиса в $\mathbb{R}^3$

Например, в $\mathbb{R}^3$ с точностью до непрерывной деформации имеется ровно два типа базисов[2] (см. рис.3), и тип базиса меняется на противоположный при смене знака одного из базисных векторов.

1.3. Определение. *Функция $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ от n аргументов $v_i \in k^n$ со значениями в поле k называется ориентированным объёмом n-мерного параллелипипеда (или просто формой объёма), если она обладает следующими свойствами:*

(i) $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, *если* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *— это стандартный базис в* k^n*;*

(ii) $\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, v + \lambda w, \dots, w, \dots)$ $\forall\, \lambda \in k$ *и любых значений v, w любых двух различных аргументов (при фиксированных остальных аргументах);*

(iii) $\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda\omega(\dots, v, \dots)$ $\forall\, \lambda \in k$ *и любого значения v любого из аргументов (при фиксированных остальных аргументах).*

Из перечисленных свойств формально вытекает ещё несколько.

Задача 6.2. Выведите из однородности (iii), что форма объёма обращается в ноль, если хотя бы один из аргументов равен нулю.
Указание: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{0}$, где $\vec{0} \in k^n$, а $0 \in k$.

1.3.1. Лемма. . *Форма объёма зануляется на всяком линейно зависимом наборе векторов.*

Доказательство. Если векторы $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ линейно зависим, то один из них линейно выражается через остальные, скажем: $v_n = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_{n-1}v_{n-1}$. Многократно применяя свойство (ii), получаем:

$$\begin{aligned}\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega(\, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\,,\, \vec{0} + x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_{n-1}v_{n-1}\,) = \\ &= \omega(\, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\,,\, \vec{0}\,) = 0\end{aligned}$$

[2]по определению, два базиса приннадлежат одному типу, если их можно включить в непрерывное семейство базисов $\{e_i(t)\}_{i=1,2,3}$, $t \in [0, 1]$

□

Следующее свойство геометриически уже не столь очевидно.

1.3.2. Лемма. *Фома объёма линейна по каждому аргументу, т. е. для каждого из аргументов (при фиксированных остальных) выполнено равенство:*

$$\omega(\,\dots,\,\lambda v+\mu w,\,\dots\,)=\lambda\omega(\,\dots,\,v,\,\dots\,)+\mu\omega(\,\dots,\,w,\,\dots\,)$$

при любых $v,w\in k^n$, $\lambda,\mu\in k$.

Доказательство. Принимая во внимание свойство (iii) формы объёма, достаточно доказать лишь равенство

$$\omega(\,\dots,\,v+w,\,\dots\,)=\omega(\,\dots,\,v,\,\dots\,)+\omega(\,\dots,\,w,\,\dots\,)\qquad\forall\,v,w\in k^n\,.\tag{6-1}$$

Предположим сначала, что один из наборов аргументов $(\,\dots,\,v,\,\dots\,)$ или $(\,\dots,\,w,\,\dots\,)$, — скажем, первый, — линейно независим, а значит, составляет базис в k^n. Тогда мы имеем разложения вида

$$\begin{aligned} w &= x\cdot v+(\text{линейная комбинация значений остальных аргументов})\\ v+w &= (1+x)\cdot v+(\text{линейная комбинация значений остальных аргументов})\end{aligned}$$

(взятая в скобки линейная комбинация одинакова в обоих разложениях) с некоторым $x\in k$. Многократно примененяя свойство (ii) из определения формы объёма получаем:

$$\omega(\,\dots,\,w,\,\dots\,)=\omega(\,\dots,\,xv,\,\dots\,)=x\cdot\omega(\,\dots,\,v,\,\dots\,)$$

$$\omega(\,\dots,\,v+w,\,\dots\,)=\omega(\,\dots,\,(1+x)v,\,\dots\,)=(1+x)\cdot\omega(\,\dots,\,v,\,\dots\,)\,,$$

откуда сразу следует (6-1). Остаётся рассмотреть случай, когда оба набора $(\,\dots,\,v,\,\dots\,)$ и $(\,\dots,\,w,\,\dots\,)$ линейно зависимы. Но тогда и набор $(\,\dots,\,v{+}w,\,\dots\,)$ тоже будет линейно зависим (почему?), а значит, все три члена в формуле (6-1) обратятся в ноль.
□

В следующем параграфе мы представим оказательство существования и единственности формы объёма на k^n. Оно будет выведено из общих свойств полилинейных форм, справедливых над любыми коммутативными кольцами.

§2. Полилинейные косые формы

2.1. Полилинейность, знакопеременность и кососимметричность. Пусть V — произвольный модуль над любым коммутативным кольцом K. K-значная функция $f(v_1,v_2,\dots,v_n)$ от n аргументов $v_i\in V$ называется

– ***полилинейной формой***[3], если она удовлетворяет условию Лм.1.3.2, т. .е. K-линейна по каждому из аргументов (при фиксированных остальных).

– ***знакопеременной***, если она меняет знак при перестановке любых двух аргументов, т. е. $f(\,\dots,\,v,\,\dots,\,w,\,\dots\,)=-f(\,\dots,\,w,\,\dots,\,v,\,\dots\,)$,

[3]термин *форма* в алгебре и анализе является синонимом сочетания *однородная функция*; K-линейность — это однородность плюс аддитивность

– *косой* (или *кососимметричной*), если она обращается в нуль при совпадении значений любой пары различных аргументов, т. е. $f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,) = 0$.
Отметим, что форма объёма на k^n, буде она существует, является примером полилинейной кососимметричной формы, ибо имеет место

2.1.1. Предложение. *Если $2 = 1 + 1$ не нуль и не делитель нуля в K, то для любой полилинейной формы $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ знакопеременность, кососимметричность и свойство (ii) из определения формы объёма попарно эквивалентны.*

Доказательство. Знакопеременность влечет кососимметричность, поскольку переставляя в $f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,)$ равные аргументы v и v получим:

$$f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,) = -f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,)\,,$$

откуда $2f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,) = 0$, что влечет $f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, v,\, \dots\,) = 0$, если $2 = 1 + 1$ не является делителем нуля (и не равна нулю).

Кососимметричность влечет свойство (ii) из Опр.1.3 над любым кольцом, поскольку

$$f(\,\dots,\, v + \lambda w,\, \dots,\, w,\, \dots\,) = f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, w,\, \dots\,) + \lambda f(\,\dots,\, w,\, \dots,\, w,\, \dots\,)\,,$$

и второе слагаемое зануляется.

Наконец, свойство (ii) влечет знакопеременность также над любым кольцом:

$$\begin{aligned}
f(\,\dots,\, v,\, \dots,\, w,\, \dots\,) &= f(\,\dots,\, v + w,\, \dots,\, w,\, \dots\,) = \\
&= f(\,\dots,\, v + w,\, \dots,\, w - (v + w),\, \dots\,) = \\
&= f(\,\dots,\, v + w,\, \dots,\, -v,\, \dots\,) = \\
&= f(\,\dots,\, v + w - v,\, \dots,\, -v,\, \dots\,) = \\
&= f(\,\dots,\, w,\, \dots,\, -v,\, \dots\,) = \\
&= -f(\,\dots,\, w,\, \dots,\, v,\, \dots\,)\,.
\end{aligned}$$

□

2.1.2. Соглашение о характеристике. Всюду далее мы будем предполагать, что $2 = 1 + 1 \neq 0$ не является делителем нуля в кольце K (или что поле k имеет $\mathrm{char}\, k \neq 2$). Таким образом, знакопеременность и кососимметричность будут означать для нас одно и то же.

2.2. Перестановки. В предстоящих далее вычислениях нам потребуется следить за тем, как меняется знак кососимметричной формы не только при перестановке пары аргументов, но и при произвольных перестановках всей совокупности её аргументов. Аргументы представляют собой упорядоченное множество $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ и говоря об их перестановках, удобно опускать бессодержательный символ v и следить только за номерами, а вернее за тем, на каких позициях стоят какие номера.

Формально, *перестановкой* конечного упорядоченного множества $\{1, 2, \dots, n\}$ из n попарно разных элементов (мы обозначили их числами $1, 2, \dots, n$) называется строчка

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}\,,$$

где σ — произвольное взаимно-однозначное отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Совокупность всех перестановок n-элементного упорядоченного множества обозначается $\mathfrak{S}_n$.

Задача 6.3. Сколько всего перестановок имеется в $\mathfrak{S}_n$?

Ответ: $n!$.

Символами $\sigma, \tau, \varrho, \eta, \ldots$ мы далее будем обозначать как сами перестановки, так и соответствующие им взаимно-однозначные отображения $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Тождественная перестановка обозначается через Id. *Композиция* $\tau\sigma \in \mathfrak{S}_n$ перестановок $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ и $\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)\}$ есть, по определению, перестановка $\{\tau(\sigma(1)), \tau(\sigma(2)), \ldots, \tau(\sigma(n))\}$, отвечающая композиции соответствующих отображений σ, τ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Например, если $\sigma = (3, 2, 4, 5, 1), \tau = (5, 4, 2, 3, 1) \in \mathfrak{S}_5$, то $\tau\sigma = (2, 4, 3, 1, 5)$.

Задача 6.4. Убедитесь, что композиция перестановок ассоцитивна: $\sigma(\tau\eta) = (\sigma\tau)\eta$ $\forall\, \sigma, \tau, \eta \in \mathfrak{S}_n$, но не коммутативна.

Задача 6.5. Убедитесь, что всякая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ имеет единственную обратную $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n : \sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = Id$, и что отображение взятия композиции с фиксированной перестановкой $\sigma \in \mathfrak{S}_n : \quad \tau \longmapsto \sigma\tau$ является биекцией $\mathfrak{S}_n$ на себя.

Перестановка каких-то двух элементов между собой, не меняющая никаких других элементов, называется *транспозицией*. Всякая транспозиция τ, очевидно, обратна сама себе.

Задача 6.6. Убедитесь, что всякая перестановка есть композиция некоторого количества транспозиций. Единственно ли такое разложение?

Ответ: Очевидно нет !

2.2.1. Чётность и знак перестановки. Перестановка называется *чётной* или *нечётной* в соответствии с тем, произведением чётного или нечётного числа транспозиций она является. По определению, *знак* $sgn\,(\sigma)$ перестановки σ — это $+1$, если σ чётна, и -1, если σ нечётна. Корректность всего сказанного (т. е. невозможность представить одну и ту же перестановку в виде композиции как чётного, так и нечётного числа транспозиций) вытекает из следующего предложения, которое позволяет определить чётность перестановки не прибегая к её разложению.

2.2.2. Предложение. *Чётность перестановки* $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ *совпадает с чётностью числа всех пар* $(\sigma(i), \sigma(j))$ *(где* $1 \le i < j \le n$ *– любые), у которых* $\sigma(i) > \sigma(j)$*, т. е. всех пар, порядок элементов в которых изменился под действием* σ *на противоположный (такие пары называются* инверсиями *или* беспорядками*).*

Доказательство. Достаточно показать, что количество беспорядков у композиции произвольной перестановки σ с любой транспозицией τ_{ij} (переставляющей между собой i и j) отличается от количества беспорядков в σ на нечётное число. Но $\sigma\tau_{ij}$ отличается от σ тем, что элементы $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ переставлены:

$$\begin{aligned} \sigma &= (* * * * * \sigma(i) * * * * * \; \sigma(j) * * * * *) \\ \sigma\tau_{ij} &= (* * * * * \sigma(j) * * * * * \; \sigma(i) * * * * *)\,, \end{aligned}$$

и от такой перестановки число беспорядков изменится на удвоенное число элементов, стоящих между $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ (ибо все пары $(\sigma(i), *)$ и $(*, \sigma(j))$, где $*$ стоит между $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$, превратятся, соответственно, в пары $(\sigma(j), *)$ и $(*, \sigma(i))$ противоположной "инверсности") да ещё на единицу за счёт изменения "инверсности" в самой паре $(\sigma(i), \sigma(j))$, подвергнутой транспозиции.

□

2.2.3. Следствие. *Значение кососимметричной формы не изменяется при чётных перестановках аргументов и меняет знак при нечётных перестановках аргументов.*

Задача 6.7. Как чётность композиции $\sigma\tau$ зависит от чётности σ и τ ?

Задача 6.8. Докажите, что взятие композиции с произвольно зафиксированной нечётной перестановкой задаёт биекцию между множеством чётных перестановок и множеством нечётных перестановок.

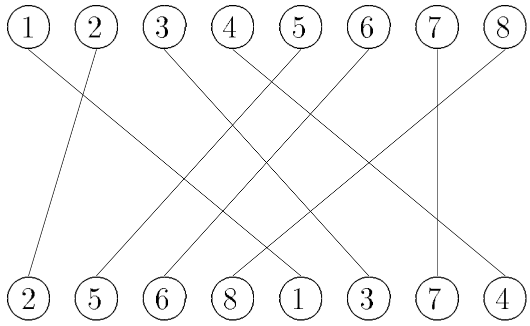

Рис. 4. Правило ниточек

Для практического определения чётности перестановки обычно используют *правило ниточек*, позволяющее легко подсчитать число беспорядков. Надо соединить ниточками пары одинаковых чисел в записанных друг под другом наборах $\{1,\dots,n\}$ и $\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}$, следя за тем, чтобы эти ниточки пересекались не более, чем по две. Тогда каждая инверсная пара превносит ровно одно пересечение ниточек, и общее число инверсий есть суммарное число пересечений. Например, число инверсий в перестановке $(2,5,6,8,1,3,7,4)\in\mathfrak{S}_8$ равно 12 (см. рис.4).

2.3. Ключевое вычисление. Пусть $f(v_1,v_2,\dots,v_n)$ — полилинейная кососоcимметричная форма на K^n. Тогда значение $f(v_1,v_2,\dots,v_n)=1$ на произвольном наборе векторов можно явно выразить через значение f на стандартном базисе $(e_1,e_2,\dots,e_n)$. В самом деле, пусть

$$v_j=\sum_i c_{ij}e_i\ ,\qquad j=1,2,\dots,n\ ,$$

где $(c_{\alpha\beta})=C_{ev}$ — это матрица перехода, по столбцам которой стоят координаты векторов v_i в базисе e_i. Пользуясь полилинейностью, находим:

$$\begin{aligned} f(v_1,v_2,\dots,v_n) &= f\left(\sum_i c_{i1}e_i\,,\ \sum_i c_{i2}e_i\,,\ \dots\,,\ \sum_i c_{in}e_i\right)= \\ &= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n} f\Big(c_{i_11}e_{i_1}\,,\ c_{i_22}e_{i_2}\,,\ \dots\,,\ c_{i_nn}e_{i_n}\Big)= \\ &= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} c_{i_11}c_{i_22}\cdots c_{i_nn}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})\ . \end{aligned}$$

Из кососимметричности f вытекает, что $f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})=0$ если среди индексов i_ν есть совпадающие. Поэтому в последней сумме реально участвуют лишь слагаемые, у которых набор индексов $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ является *перестановкой* набора $(1,2,\dots,n)$. Таким образом, принимая во внимание Сл.2.2.3, мы можем переписать эту сумму в виде

$$f(v_1,v_2,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma)c_{\sigma(1)1}c_{\sigma(2)2}\cdots c_{\sigma(n)n}\cdot f(e_1,e_2,\dots,e_n)\ .$$

2.4. Определение. *Пусть $C=(c_{\alpha\beta})$ — квадратная матрица с элементами из некоторого коммутативного кольца K. Число*

$$\det C=\det(c_{\alpha\beta})\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma)c_{\sigma(1)1}c_{\sigma(2)2}\cdots c_{\sigma(n)n}\in K\ , \tag{6-2}$$

называется определителем квадратной матрицы $C=(c_{\alpha\beta})$.

Предыдущее вычисление доказывает

2.4.1. Предложение. *Пусть f — полилинейная кососимметричная форма от n аргументов на произвольном K-модуле, и $\{e_i\}$ и $\{v_i\}$ — два набора из n векторов, связанные при помощи матрицы перехода $C \in Mat_n(K)$:*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C \ .$$

Тогда $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det(C) \cdot f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

□

В частности, мы получаем, что форма объёма на координатном векторном пространстве k^n единственна (если существует) и задаётся формулой

$$\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det C_v \ ,$$

где C_v — матрица, составленная из вектор-столбцов $v_i \in k^n$, а для доказательства существования формы обёма остаётся лишь доказать

2.4.2. Предложение. *Определитель $\det(C)$ является полилинейной кососимметричной функцией от столбцов матрицы $C \in Mat_n(K)$ (где K – произвольное коммутативное кольцо), и $\det E = 1$, если E — единичная матрица.*

Доказательство. Полилинейность видна непосредственно из (6-2) — каждое из складываемых произведений содержит ровно по одному элементу из каждого столбца, а значит, линейно по каждому столбцу. Свойство $\det E = 1$ тоже очевидно, ибо если

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 1 \ , & \text{при} \quad \alpha = \beta \\ 0 \ , & \text{при} \quad a \neq \beta \end{cases} \ ,$$

то сумма в правой части (6-2) содержит лишь одно ненулевое слагаемое, соответствующее тождественной перестановке.

Для проверки кососимметричности обозначим через C' матрицу, полученную из C перестановкой i-ого и j-того столбцов. Произведения, входящие в выражение для $\det(C')$ отличается от произведений в (6-2) толко i-тым и j-тым множителями: вместо

$$sgn\,(\sigma) \cdot *****\, c_{\sigma(i)i} \ ***** \ c_{\sigma(j)j} \ *****$$

теперь будут складываться произведения

$$sgn\,(\sigma) \cdot *****\, c_{\sigma(i)j} \ ***** \ c_{\sigma(j)i} \ ***** \ ,$$

которые, если переставить в них i-тый и j-тый множители местами, можно записать в виде

$$sgn\,(\sigma) c_{\varrho(1)1} c_{\varrho(2)2} \cdots c_{\varrho(n)n} \ ,$$

где $\varrho = \sigma\tau_{ij}$ есть композиция перестановки σ и транспозиции τ_{ij} индексов i и j (ср. с доказательством Пр.2.2.2). Поскольку по зад.6.5 композиция $\varrho = \sigma\tau_{ij}$ также пробегает $\mathfrak{S}_n$ когда σ пробегает $\mathfrak{S}_n$, а $sgn\,(\varrho) = -sgn\,(\sigma)$, имеем:

$$\det C' = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma) c_{\varrho(1)1} c_{\varrho(2)2} \cdots c_{\varrho(n)n} = -\sum_{\varrho \in \mathfrak{S}_n} sgn\,(\varrho) c_{\varrho(1)1} c_{\varrho(2)2} \cdots c_{\varrho(n)n} = -\det C \ .$$

□

2.4.3. Следствие. *Форма объёма на векторном пространстве k^n существует и единственна. Её значение на наборе вектор-столбцов равно определителю матрицы, составленной из этих столбцов.*

□

2.4.4. Следствие. *Определитель матрицы обращается в ноль, если столбцы матрицы линейно-зависимы (в частности, если есть нулевой столбец или два совпадающих столбца).*

□

2.4.5. Следствие. *Пусть V — свободный K-модуль ранга n. Совокупность всех полилинейных косых форм от n аргументов $v_i \in V$ представляет собой свободный K-модуль*[4] *ранга 1. Для любого базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$ существует единственная форма $\omega_e \in \Lambda^n(K^n)$, для которой $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. Произвольная форма $f \in \Lambda^n(K^n)$ будет линейно выражаться через ω_e по формуле*

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \omega_e(v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad \forall\ v_1, v_2, \dots, v_n\ \in V$$

(т. е. форма ω_e является базисной образующей модуля всех полилинейных косых форм).

Доказательство. Согласно Пр.2.4.1, значение полилинейной кососимметричной формы f на произвольном наборе векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ выражается через её значение на произвольном базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ по формуле

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C_{ev} f(e_1, e_2, \dots, e_n)\ , \tag{6-3}$$

где $(c_{\alpha\beta}) = C_{ev}$ — это матрица перехода, по столбцам которой стоят координаты векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в базисе $\{e_i\}$. Полагая

$$\omega_e(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det C_{ev}\ ,$$

из доказанных выше свойств определителя немедленно получаем, что ω_e – это полилинейная косая форма, принимающая значение 1 на базисе $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Равенство (6-3) показывает, что все остальные формы пропорциональны ω_e, откуда сразу следуют все утверждения следствия.

□

§3. Свойства определителей.

3.1. Комбинаторный анализ формулы. С комбинаторной точки зрения, формула для определителя $(n \times n)$-матрицы $C = (c_{\alpha,b})$

$$\det(C) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma) c_{\sigma(1)1} c_{\sigma(2)2} \cdots c_{\sigma(n)n}$$

представляет собой сумму всех возможных произведений из n матричных элементов, выбранных так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце присутствовал ровно один из

[4] он обозначается $\Lambda^n(K^n)$ и называется *n-той внешней степенью* модуля K^n

этих элементов. Позиции выбираемых элементов можно воспринимать как *график* взаимно-однозначного отображения {номера столбцов} $\xrightarrow{\sigma}$ {номера строк} (в i-том столбце выбирается $\sigma(i)$-тый элемент). Знак с которым входит в сумму соответствующее произведение есть знак σ как перестановки номеров $\{1, 2, \dots, n\}$. Например,

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}$$

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \Big(c_{11}c_{22}c_{33} + c_{21}c_{32}c_{13} + c_{31}c_{12}c_{23}\Big) - \Big(c_{31}c_{22}c_{13} + c_{21}c_{12}c_{33} + c_{11}c_{32}c_{23}\Big) \quad .$$

В частности, определитель не изменяется при замене матрицы $C = (c_{\alpha\beta})$ на транспонированную матрицу $C^t = (c^t_{\alpha\beta})$, где $c^t_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} c_{\beta\alpha}$. В самом деле, от транспонирования строки и столбцы меняются ролями, что в предыдущем комбинаторном описании проявляется только в том, что вместо σ для определения знака следует брать обратную перестановку σ^{-1}.

Задача 6.9. Докажите, что $sgn\,(\sigma^{-1}) = sgn\,(\sigma) \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Таким образом, мы доказали

3.1.1. Предложение. $\det(C) = \det(C^t) \qquad \forall\, A \in Mat_n(K)$.

□

3.1.2. Следствие. *Определитель является полилинейной кососимметричной формой от строк матрицы и не меняется при при почленном прибавлении к любой строке кратности какой-либо другой строки.*

□

В частности, формулу для вычисления определителя можно переписать в виде

$$\det C = \det(c_{\alpha\beta}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma) c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots c_{n\sigma(n)} \in K \ , \tag{6-4}$$

3.2. Мультипликативные свойства определителя обусловлены формулой Пр.2.4.1, показывающей как меняется значение полилинейной кососимметричной формы при линейной замене переменных.

3.2.1. Предложение. $\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \forall\, A, B \in Mat_n(K)$.

Доказательство. Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ — стандартный базис в K^n, а наборы векторов $\{v_i\}$ и $\{w_i\}$ определены формулами

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n)A\,, \\ (w_1, w_2, \dots, w_n) &= (v_1, v_2, \dots, v_n)B = (e_1, e_2, \dots, e_n)AB\,. \end{aligned}$$

Если ω_e — полилинейная косая форма на K^n, такая что $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, то согласно Пр.2.4.1

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \det(A)\,, \\ \omega(w_1, w_2, \dots, w_n) &= \det(AB)\,. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя выражение векторов w_i через векторы v_i получаем

$$\omega(w_1, w_2, \dots, w_n) = det(B) \cdot \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \ ,$$

откуда $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
□

3.2.2. Следствие. $\det(AB) = \det(BA) \qquad \forall\, A, B \in Mat_n(K)$.

Доказательство. $\det(A)$ и $\det(B)$ коммутируют как и все элементы K.
□

3.2.3. Следствие. *Если матрица A обратима в $Mat_n(K)$, то $\det(A)$ обратим в K.*

Доказательство. $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(E) = 1$ означает, что $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
□

3.2.4. Следствие. *Квадратная матрица A над полем*[5] *обратима тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$ (такие матрицы называются невырожденными).*

Доказательство. Пусть векторы $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ составляют базис векторного пространства V над полем k.

Если векторы $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)A$ линейно независимы, то они тоже составляют базис, и значит, матрица A будет обратимой (обратная матрица $A^{-1} = C_{ev}$ будет иметь по столбцам координаты векторов e_i в базисе v_i). По предыдущему следствию, $\det(A) \neq 0$.

Если векторы v_i (т. е. столбцы матрицы A) линейно зависимы, то $\det(A) = 0$.

Других возможностей нет.
□

3.3. Правило Крамера. Вернёмся теперь к задаче, которая была сформулирована в начале лекции, и покажем, как можно использовать определители при решении систем линейных уравнений. Условимся обозначать через $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in K^n$, определитель матрицы $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, по столбцам которой стоят координаты векторов a_i в стандартном базисе K^n. Если числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ удовлетворяют системе уравнений

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \ ,$$

т. е. доставляют разложение вектора $b \in K^n$ в виде

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \ ,$$

то вследствие линейности определителя по i-тому аргументу и кососимметричности мы имеем

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{i-1}^{n} x_\nu a_\nu, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_\nu, a_{i+1}, \dots, a_n) = x_i \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = x_i \det(A) \ ,$$

[5] обобщение на произвольное коммутативное кольцо будет получено ниже в Сл.4.3.4

что доказывает

3.3.1. Предложение. (Правило Крамера.) *При умножении определителя матрицы системы $Ax = b$ на i-тую координату решения получается определитель матрицы, которая отличается от матрицы системы заменой i-того столбца на столбец правых частей (для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$).*

□

Когда мы имеем дело с системой $Ax = b$ из n линейных уравнений от n неизвестных над *полем* $K = k$, из правила Крамера следует, что если $\det(A) \neq 0$, то для любой правой части b решение существует, единственно и даётся формулой

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)} , \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Задача 6.10. Пусть $\det(A)$ обратим в K. Попытайтесь при помощи правила Крамера получить явную формулу для элементов обратной матрицы A^{-1} в терминах самой матрицы A.

3.4. Пример: результант и дискриминант. Пусть

$$A(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu t_1^\nu t_2^{n-\nu} \qquad \text{и} \qquad B(t_1, t_2) = \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu t_1^\mu t_2^{n-\mu}$$

два однородных многочлена степеней n и m с коэффициентами в некотором поле k. Как выяснить, имеют ли они нетривиальный общий множитель в $k[t_1, t_2]$? Если таковым множителем является t_1 (или t_2), то это заметно на глаз. Если же нет, то многочлены

$$\begin{aligned} \widehat{A}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} A(1, t) = a_0 n^t + a_1 n^{t-1} + \cdots + a_{t-1} n + a_t \in k[t] \\ \widehat{B}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} B(1, t) = b_0 m^t + b_1 m^{t-1} + \cdots + b_{t-1} m + b_t \in k[t] \end{aligned}$$

имеют степени в точности n и m (т. е. имеют ненулевые a_0 и b_0 соответственно), и наличие нетривиального общего делителя у A и B в $k[t_1, t_2]$ равносильно наличию нетривиального общего делителя у $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в $k[t]$, а значит, может быть проверено при помощи алгоритма Евклида. Однако, как и метод Гаусса, алгоритм Евклида не позволяет сделать никаких качественных выводов *заранее*. Теперь мы в состоянии исправить это неудобство, ибо алгоритм Евклида также, как и метод Гаусса, в сущности, решает систему линейных уравнений.

В самом деле, если $A = DA'$, $B = DB'$, где $D, A', B' \in k[t_1, t_2]$ – некоторые однородные многочлены, то мы можем подобрать однородные многочлены X и Y степеней $\deg X = \deg B - \deg D$ и $\deg Y = \deg A - \deg D$, так чтобы в $k[t_1, t_2]$ выполнялось равенство

$$AX = DA'B' = BY .$$

Таким образом условие $\deg D \geq 1$ равносильно возможности подобрать многочлен $X \neq 0$ степени $\leq (m-1)$ и многочлен $Y \neq 0$ степени $\leq (n-1)$, удовлетворяющие равенству $AX = BY$, которое легко превратить в однородную систему из $n + m$ линейных уравнений на $m + n$ коэффициентов $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ многочленов X, Y, сравнивая мономы одинаковой степени в AX и BY.

Задача 6.11. Напишите явно матрицу этой системы.

Пусть K – произвольное коммутативное кольцо, а $A, B \in K[t_1, t_2]$ и $\widehat{A}, \widehat{B} \in K[t]$ – многочлены с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ как и выше. Определитель матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} \tag{6-5}$$

называется *результантом* двух однородных форм A, B (или двух многочленов $\widehat{A}, \widehat{B} \in k[t]$) и обозначается $R(A,B)$ (или $R_{n,m}(A,B)$).

Задача 6.12. Убедитесь, что над полем k однородные многочлены A и B из $k[t_1,t_2]$ тогда и только тогда обладают нетривиальным общим делителем в $k[t_1,t_2]$, когда $R(A,B)=0$.

Указание. это сразу следует из предыдущей задачи и свойств определетилей.

Задача 6.13. Пусть $f,g \in k[t]$ – многочлены степени $\le n$ и $\le m$ соответственно. Докажите, что равенство $R_{n.m}(f,g)=0$ равносильно совокупности трёх условий: либо $\deg f < n$, либо $\deg g < m$, либо НОД$(f,g) \ne 1$.

Задача 6.14. Убедитесь, что результант многочлена и его производной делится на старший коэффициент этого многочлена (над любым кольцом).

Пусть $f = a_0n^t + a_1n^{t-1} + \dots + a_{t-1}n + a_t \in K[t]$ – многочлен с $a_0 \ne 0$, и f' – его производная. Число $D(f) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{R_{n,n-1}(f,f')}{a_0} \in K$ называется *дискриминантом* f.

Задача 6.15. Убедитесь, что обращение дискриминанта в нуль равносильно наличию кратных корней и вычислите дискриминант квадратного и кубического многочленов.

3.4.1. Предложение. *Пусть*

$$f = a_0n^t + a_1n^{t-1} + \dots + a_{t-1}n + a_t \qquad \text{и} \qquad g = b_0m^t + b_1m^{t-1} + \dots + b_{t-1}m + b_t$$

два многочлена с коэффициентами из произвольного коммутативного кольца K. Существуют такие многочлены $u, v \in K[t]$, что $uf + vg = R_{n,m}(f,g)$ как элементы $K[t]$.

Доказательство. Равенства

$$\begin{array}{rclcccccccccccc}
t^{m-1}f & = & a_0t^{m+n-1} & + & a_1t^{n+m-2} & + & \cdots & + & a_nt^{m-1} & & & & & & \\
t^{m-1}f & = & & & a_0t^{m+n-2} & + & a_1t^{n+m-3} & + & \cdots & + & a_nt^{m-1} & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
f & = & & & & & & & a_0t^n & + & a_1t^{n-1} & + & \cdots & + & a_n \\
t^{n-1}g & = & b_0t^{m+n-1} & + & b_1t^{n+m-2} & + & \cdots & + & b_nt^{m-1} & & & & & & \\
t^{n-1}g & = & & & b_0t^{m+n-2} & + & b_1t^{n+m-3} & + & \cdots & + & b_nt^{m-1} & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
g & = & & & & & & & b_0t^m & + & b_1t^{m-1} & + & \cdots & + & b_m
\end{array}$$

означают, что столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{m+n-1} \\ t^{m+n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in K[t]^{m+n}$ является решением системы из $m+n$ линейных уравнений вида

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
t^{m-1}f & = & a_0x_1 & + & a_1x_2 & + & \cdots & + & a_nx_{n+1} & & & & & & \\
t^{m-1}f & = & & & a_0x_2 & + & a_3x_2 & + & \cdots & + & a_nx_{n+1} & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
f & = & & & & & & & a_0x_{m-1} & + & a_1x_{m-2} & + & \cdots & + & a_nx_{m+n} \\
t^{n-1}g & = & b_0x_1 & + & b_1x_2 & + & \cdots & + & b_nx_{m+1} & & & & & & \\
t^{n-1}g & = & & & b_0x_2 & + & b_1x_3 & + & \cdots & + & b_nx_{m+1} & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
g & = & & & & & & & b_0x_{n-1} & + & b_1x_{n-2} & + & \cdots & + & b_mx_{m+n}
\end{array}$$

над кольцом $K[t]$, матрица которой совпадает с (6-5). По правилу Крамера, применённому к последней координате решения, мы получаем, что $R(f,g)$ равен определителю матрицы, полученной из (6-5) заменой ненулевых элементов a_0 и b_0 в последнем столбце на f и g соответственно. Поскольку никаких других ненулевых элементов в последнем столбце нет, вычисляя этот определитель, получаем выражение вида $u(t)f(t)+v(t)g(t)$, где $f,g \in K[t]$.
□

Вот ещё несколько упражнений на вычисление определителей:

Задача 6.16. Пусть $A(t_1,t_2)$ – однородная форма степени n, и $f(t) = A(1,t)$. Докажите, что дискриминант f с точностью до умножения на ненулевую константу совпадает с резулбтантом пары форм $\dfrac{\partial A}{\partial t_1}$ и $\dfrac{\partial A}{\partial t_1}$ и найдите точно, чему равна эта констаната.

Задача 6.17. Пусть $n \geq m$ и пусть d_k, $k = 0,1,2,\dots$, — определитель матрицы, которая получается из матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \\
 & & & \iddots & & \iddots & \iddots & \\
 & & \iddots & & \iddots & \iddots & & \\
 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\
b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & &
\end{pmatrix}}_{m+n}
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n
\end{array}$$

выкидыванием по k строк и k столбцов свеху, снизу, слева и справа (т. е. выкидыванием внешнего контура толщины k). Докажите, что индекс первого ненулевого члена последовательности $d_0,d_1,d_2,\dots$ равен степени наибольшего общего делителя пары однородных форм $A = \sum a_\nu t_1^\nu t_2^{n-\nu}$ и $B = \sum a_\mu t_1^\mu t_2^{m-\mu}$ в $k[t_1,t_2]$.

§4. Соотношения Лапласа.

Площадь параллелограмма можно выразить через длины сторон, а объём параллелепипеда — через длины рёбер и площади граней. Естественно ожидать, что должны быть универсальные формулы, выражающие ориентированный объём n-мерного параллалипипеда через k-мерные объёмы k-мерных граней ($k < n$). И хотя мы пока что не обладаем надлежащей геометрической техникой для того, чтобы эти формулы *увидеть*[6] у нас есть всё необходимое для их формально-алгебраического доказательства. На языке алгебры, эти формулы (называемые формулами *разложения определителя*) означают, что $\det(C)$ можно выразить через определители подматриц, содержащихся в C. Чтобы написать их явно, нам потребуются кое-какие обозначения.

4.1. Мультииндексы, подматрицы и миноры. Буквами $I, J, K, \dots$ мы далее будем обозначать упорядоченные поднаборы вида

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_m)\ , \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m\ ,$$

в наборе $(1, 2, \dots, n)$. Каждый такой поднабор I мы будем называть *мультииндексом*, а число m элементов набора I — *длиной мультииндекса* и обозначать $\#I$. Сумма $i_1 + i_2 + \dots + i_m$ называется *весом* мультииндекса $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и обозначается $|I|$. Мультииндекс, состоящий из всех элементов набора $(1, 2, \dots, n)$, не входящих в мультииндекс I, называется *дополнительным* к I и обозначается $\widehat{I}$. Ясно, что J совпадает с $\widehat{I}$ если и только если $\#I + \#J = n$ и $I \cap J = \emptyset$. Отметим также, что всего имеется $\binom{n}{k}$ мультииндексов длины k, и что всегда

$$|I| + |\widehat{I}| = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Например: если $n = 8$ и $I = (1, 3, 4, 6, 8)$, то $\#I = 5$, $|I| = 22$, $\widehat{I} = (2, 5, 7)$, $\#\widehat{I} = 3$, $|\widehat{I}| = 14$.

Мы будем использовать мультииндексы для задания подматриц в данной $(n \times n)$-матрице $C = (c_{\alpha\beta})$. А именно, через $C[IJ]$, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, мы обозначаем квадратную $(m \times m)$-подматрицу, образованную элементами $c_{i_\alpha j_\beta}$, $1 \le \alpha, \beta \le m$. Определитель $\det(C[IJ])$ называется IJ-м *минором* (m-того порядка) матрицы C и обозначается C_{IJ} (по аналогии с матричными элементами, которые есть ни что иное как миноры 1-го порядка).

Например: если $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$, то $C_{(2,4),(2,3)} = \det \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} = c_{22}c_{43} - c_{42}c_{23}$.

Если упорядочить мультииндексы длины m каким-то фиксированным способом[7], то из миноры m-того порядка также можно записать в виде квадратной матрицы $\left(C_{IJ}\right)$ размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C$ и называется *m-той внешней степенью* матрицы C.

4.2. Теорема. (Теорема Лапласа.) *Для любой квадратной матрицы A над любым коммутативным кольцом выполнены следующие два набора тождеств:*

---

[6] мы построим соответствующую геометрическую теорию в следующих двух семестрах

[7] например, *лексикографически*, т. е. полагая, что $I < J$, если первый считая слева из несовпадающих элементов в I меньше, чем в J; самым маленьким при таком порядке будет мультииндекс $(1, 2, \dots, m)$, за ним будет следовать мультииндекс $(1, 2, \dots, m-1, m+1)$ и т. д.

(А) *разложение определителя по строкам из I: для произвольным образом выбранного мультииндекса I длины $\#I = k$*

$$\det A = \sum_{J\,:\,\#J=k} (-1)^{|I|+|J|} A_{IJ} A_{\widehat{I}\widehat{J}}$$

(суммирование происходит по всем мультииндексам J длины $\#J = \#I = k$);

(Б) *теорема об умножении на чужие дополнения: для двух произвольным образом выбранных различных мультииндексов $I \neq J$, одинаковой длины $\#I = \#J = k$*

$$\sum_{K\,:\,\#K=k} (-1)^{|I|+|K|} A_{IK} A_{\widehat{J}\widehat{K}} = 0$$

(суммирование происходит по всем мультииндексам K длины $\#K = k$).

Доказательство. Поскольку в каждом из $n!$ произведений, входящих в сумму из (6-4):

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\ ,$$

присутствует ровно по одному элементу из каждой строки, можно переупорядочить множители так, чтобы сначала шли элементы из строк с номерами из набора $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, а потом — из дополнительного набора $\widehat{I} = (\widehat{\imath}_1, \widehat{\imath}_2, \ldots, \widehat{\imath}_{n-k})$ (напомню, что $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $\widehat{\imath}_1 < \widehat{\imath}_2 < \cdots \widehat{\imath}_{n-k}$. В результате получим:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn\,(\sigma) a_{i_1\sigma(i_1)} a_{i_2\sigma(i_2)} \cdots a_{i_k\sigma(i_k)} a_{\widehat{\imath}_1\sigma(\widehat{\imath}_1)} a_{\widehat{\imath}_2\sigma(\widehat{\imath}_2)} \cdots a_{\widehat{\imath}_{n-k}\sigma(\widehat{\imath}_{n-k})}\ .$$

Разобьём теперь множество всех перестановок $\mathfrak{S}_n$ в объединение непересекающихся подмножеств $\mathfrak{S}_{JI}$, каждое из которых состоит из всех перестановок, переводящих набор $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ в какую-либо перестановку набора $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ (напомню, что $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$). Каждая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_{JI}$ однозначно представимых в виде композиции $\sigma = \tau\eta\sigma_{JI}$, где $\sigma_{JI} \in \mathfrak{S}_n$ — фиксированная перестановка, отображающая I на J и $\widehat{I}$ на $\widehat{J}$ с сохранением порядка (т. е. $\sigma_{JI}(i_\alpha) = j_\alpha$ и $\sigma_{JI}(\widehat{\imath}_\alpha) = \widehat{\imath}_\alpha$), $\tau \in \mathfrak{S}_k$ — произвольная перестановка индексов $\{1, 2, \ldots, k\}$ в наборе $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, а η — произвольная перестановка индексов $\{1, 2, \ldots, (n-k)\}$ в дополнительном наборе $(\widehat{\jmath}_1, \widehat{\jmath}_2, \ldots, \widehat{\jmath}_{n-k})$.

Задача 6.18. Сколько всего перестановок в $\mathfrak{S}_{JI}$?

Задача 6.19. Убедитесь, что $sgn\,(\sigma_{JI}) = (-1)^{|I|+|J|}$.

Задача 6.20. Убедитесь, что знак $\tau\eta\sigma_{JI}$ как подстановки из $\mathfrak{S}_n$ есть произведение знака σ_{JI} как элемента $\mathfrak{S}_n$, знака η как элемента $\mathfrak{S}_{n-k}$ и знака τ как элемента $\mathfrak{S}_k$.

Таким образом, выражение для $\det(A)$ можно переписать в виде:

$$\sum_J \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{JI}} sgn\,(\sigma) a_{i_1\sigma(i_1)} a_{i_2\sigma(i_2)} \cdots a_{i_k\sigma(i_k)} a_{\widehat{\imath}_1\sigma(\widehat{\imath}_1)} a_{\widehat{\imath}_2\sigma(\widehat{\imath}_2)} \cdots a_{\widehat{\imath}_k\sigma(\widehat{\imath}_k)} =$$

$$= \sum_J \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \sum_{\eta\in\mathfrak{S}_{n-k}} (-1)^{|I|+|J|} sgn\,(\tau) sgn\,(\eta) a_{i_1 j_{\tau(1)}} a_{i_2 j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k j_{\tau(k)}} a_{\widehat{\imath}_1 \widehat{\jmath}_{\eta(1)}} a_{\widehat{\imath}_2 \widehat{\jmath}_{\eta(2)}} \cdots a_{\widehat{\imath}_{n-k} \widehat{\jmath}_{\eta(n-k)}} =$$

$$= \sum_J (-1)^{|I|+|J|} \left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} sgn\,(\tau) a_{i_1 j_{\tau(1)}} a_{i_2 j_{\tau(2)}} \cdots a_{i_k j_{\tau(k)}} \right) \left(\sum_{\eta\in\mathfrak{S}_{n-k}} sgn\,(\eta) a_{\widehat{\imath}_1 \widehat{\jmath}_{\eta(1)}} a_{\widehat{\imath}_2 \widehat{\jmath}_{\eta(2)}} \cdots a_{\widehat{\imath}_{n-k} \widehat{\jmath}_{\eta(n-k)}} \right)$$

Последнее, по определению, совпадает с $\sum_J (-1)^{|I|+|J|} A_{IJ} A_{\widehat{I}\widehat{J}}$, что доказывает тождество (А).

Тождество (Б) следует из формулы (А), применённой к матрице, имеющей одинаковые строки (и стало быть, нулевой определитель). Точнее, пусть I и J — два разных мультииндекса одинаковой длины k. Тогда $I \neq I \cap J$ и $J \neq I \cap J$, но $\#\Big(J \setminus (I \cap J)\Big) = \#\Big(I \setminus (I \cap J)\Big)$. Модифицируем матрицу A, заменив в ней строки из набора $J \setminus (I \cap J)$ на строки из набора $I \setminus (I \cap J)$ (с сохранением порядка). Полученная в результате матрица A' имеет дублирующиеся строки, а значит, $\det(A') = 0$. С другой стороны, при любом K минор A'_{JK} совпадает с минором A_{IK}, а минор $A'_{\widehat{J}\widehat{K}}$ — с минорами $A_{\widehat{J}\widehat{K}}$ (ибо совпадают соответствующие подматрицы). Поэтому

$$\sum_K (-1)^{|I|+|K|} A_{IK} A_{\widehat{J}\widehat{K}} = (-1)^{|I|-|J|} \sum_K (-1)^{|J|+|K|} A_{IK} A_{\widehat{J}\widehat{K}} =$$

$$= (-1)^{|I|-|J|} \sum_K (-1)^{|J|+|K|} A'_{JK} A_{\widehat{J}\widehat{K}} = (-1)^{|I|-|J|} \det(A') = 0 \ .$$

□

4.2.1. Терминологические замечания. Минор $A_{\widehat{I}\widehat{J}}$ называется *дополнительным* к соответствующему минору A_{IJ}, а число $(-1)^{|I|+|J|} A_{\widehat{I}\widehat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору A_{IJ}.

Если лексикографически упорядочить все мультииндексы длины k и рассмотреть $(\binom{n}{k} \times \binom{n}{k})$-матрицы $\Lambda^k(A)$ и $\widehat{\Lambda^k(A)}$, у которых в (IJ)-той клетке расположены, соответственно, минор A_{IJ} и его алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} A_{\widehat{I}\widehat{J}}$, то все соотношения Лапласа можно записать одной формулой

4.2.2. Следствие. *В кольце квадратных матриц размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ над произвольным коммутативным кольцом K выполнено тождество*

$$\Lambda^k(A) \cdot \widehat{\Lambda^k(A)}^t = \begin{pmatrix} \det(A) & & & 0 \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E \ , \tag{6-6}$$

где $A \in Mat_n(K)$ — произвольная матрица, а в правой части стоит диагональная матрица с элементами $\det(A)$ на главной диагонали.

□

Задача 6.21. Пользуясь равенством $\det(A) = \det(A^t)$ напишите формулу для разложения определителя по столбцам с номерами $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и соответствующее тождество для умножения на чужие алгебраические дополнения.

Задача 6.22. Докажите, что если квадратная матрица имеет блочный вид

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \ ,$$

где B, C — квадратные подматрицы (а 0 – нулевая подматрица), то $\det(A) = \det(B)\det(C)$.

Задача 6.23. Докажите, что если $AB = E$ (то есть матрицы A и B обратны друг другу), то $A_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} B_{\widehat{J}\widehat{I}}$, т. е. каждый минор матрицы A равен своему алгебраическому дополнению в матрице, транспонированной к B.

4.3. Присоединенная матрица. Наиболее часто формулы Лапласа используются в ситуации, когда $I = (i)$ – один индекс. В этом случае $A_{IJ} = a_{ij}$, где $(j) = J$, т. е. матрица из миноров $\Lambda^1(A)$ совпадает с самой матрицей A. Алгебраическое дополнение $A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ к минору $A_{IJ} = a_{ij}$ есть определитель матрицы, которая получается из A вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

4.3.1. Следствие. (Формула для разложения определителя по строке.)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$$

для любого фиксированного $1 \le i \le n$.

□

4.3.2. Следствие. (Теорема об умножении на чужие дополнения.)

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{\widehat{k}\widehat{\jmath}}$$

для любых фиксированных $i \ne k$, $1 \le i, k \le n$.

□

Задача 6.24. Получите аналогичные формулы для разложения по столбцу.

Матрица алгебраических дополнений $\widehat{\Lambda^{n-1}}(A) = \widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})$ имеет $\widehat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ и называется *присоединённой матрицей* матрицы A. Как и соотношения Лапласа, два редыдущих следствия можно записать одной матричной формулой, являющейюся специализацией формулы (6-6).

4.3.3. Следствие. (Теорема о присоединенной матрице.) *Над любым коммутативным кольцом K в кольце $Mat_n(K)$ выполнено тождество*

$$A \cdot \widehat{A}^t = \begin{pmatrix} \det(A) & & & 0 \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E \ , \qquad \forall\, A \in Mat_n(K) \ .$$

□

4.3.4. Следствие. (Критерий обратимости матрицы.) *Квадратная матрица $A \in Mat_n(K)$ над произвольным коммутативным кольцом K обратима тогда и только тогда, когда $\det(A)$ обратим в K, причём в этом слечае $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \widehat{A}^t$ (где умножение матрицы $\widehat{A}$ на число $\det(A)^{-1}$ означает умножение каждого элемента матрицы на это число).*

□

4.3.5. Следствие. *Набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ тогда и только тогда составляет базис в свободном модуле K^n над произвольным коммутативным кольцом K, когда определитель матрицы, составленной из координат векторов v_i, обратим в K.*

□

4.3.6. Следствие. *Пусть V — произвольный K-модуль, порождённый набором векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, и $\varphi\colon V \longrightarrow V$ — произвольный эндоморфизм. Если действие φ на образующие происходит по правилу $\varphi(v_j) = \sum\limits_i a_{ij} v_i$, т. е.*

$$(\,\varphi(v_1),\, \varphi(v_2),\, \dots,\, \varphi(v_n)\,) = (v_1, v_2, \dots, v_n)A\,, \qquad \text{где} \qquad A = (a_{ij})\,,$$

то подмодуль $\det(A)\cdot V \overset{\text{def}}{=} \{\, w = \det(A)v \mid v \in V\,\}$ *содержится в образе* $\operatorname{im}(\varphi)$.

Доказательство. В самом деле, если $w = \det(A)\cdot v$ для некоторого $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$, то

$$\begin{aligned} w &= (v_1, v_2, \dots, v_n)\cdot \begin{pmatrix} \det(A) & & & 0 \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n)\cdot A \cdot \widehat{A}^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\,\varphi(v_1),\, \varphi(v_2),\, \dots,\, \varphi(v_n)\,)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{im}(\varphi)\,, \end{aligned}$$

где $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\widehat{A}$.

□

4.4. Тождество Гамильтона - Кэли. Пусть $A \in Mat_n(K)$ — произвольная квадратная матрица над коммутативным кольцом K. Координатный K-модуль K^n можно наделить структурой модуля над кольцом многочленов $K[t]$, полагая по определению, что результатом умножения столбца $v \in K^n$ на многочлен $c(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_d t^d$ является столбец

$$c(t)v \overset{\text{def}}{=} c_0 v + c_1 A v + c_2 A^2 v + \dots + c_d A^d v$$

(правую часть можно воспринимать как результат умножения столбца v на матрицу $c(A)$, полученную подстановкой в многочлен $c(t)$ значения $t = A$ из K-алгебры[8] $Mat_n(K)$).

Задача 6.25. Проверьте выполнения аксиом $K[t]$-модуля для K^n.

Задача 6.26. Проверьте, что умножения $\mu_t\colon\ v \longmapsto tv$ и $\mu_A\colon\ v \longmapsto Av$ являются гомоморфизмами $K[t]$-модулей.

Поскольку $K[t] \supset K$, как $K[t]$-модуль K^n будет по прежнему порождаться стандартными базисными столбцами $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, однако над $K[t]$ они уже не будут линейно независимы, ибо $te_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n$ для каждого $j = 1, 2, \dots, n$.

Из этих соотношений следует, в частности, что гомоморфизм $\alpha = \mu_t - \mu_A\colon\ K^n \longrightarrow K^n$, заданный правилом $v \overset{\alpha}{\longmapsto} tv - Av$, отображает каждую из образующих e_i, а значит, и весь модуль K^n в нуль. Из равенства $(\,\alpha(e_1),\, \alpha(e_2),\, \dots,\, \alpha(e_n)\,) = (e_1, e_2, \dots, e_n)(tE - A)$ (квадратная матрица $(tE - A)$ получается из $-A$ прибавлением t ко всем элементам главной диагонали)

[8] K-алгеброй называется любое кольцо, которое одновременно является K-модулем, причём кольцевые операции перестановочны с умножением на элементы из K. $Mat_n(K)$ имеет каноническую структуру K-модуля, в которой умножение матрицы на число есть умножение всех элементов матрицы на это число, и это умножение, очевидно, перестановочно с кольцевыми операциями в $Mat_n(K)$.

по Сл.4.3.6 вытекает, что умножение на на $\det(tE - A)$ также должно аннулировать K^n. Тем самым, справедливо

4.4.1. Предложение. (Тождество Гамильтона-Кэли.) *При подстановке матрицы A вместо переменной t в многочлен $\det(tE - A) \in K[t]$ получается нулевая матрица.*

□

Многочлен $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Поэтому тождество Гамильтона-Кэли часто формулируют словами: *над произвольным коммутативным кольцом всякая квадратная матрица аннулируется своим характеристическим многочленом.*

Задача 6.27. Пусть $\det(tE - A) = \sigma_0 t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} t + \sigma_n$. Докажите, что $\sigma_0 = 1$, а при $1 \le k \le (n-1)$ коэффициент $(-1)^k \sigma_k$ равен сумме всех миноров k-того порядка, главная диагональ которых совпадает с главной диагональю A (такие миноры называются *главными*). В частности, $s_1 = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ (величина $\mathrm{tr}\,(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ называется *следом* матрицы A) и $\sigma_n = (-1)^n \det(A)$.

Задача 6.28. Вычислите $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t-0} \det(E + tA)$.

Задача 6.29. Проверьте, что матрицы A и $C^{-1}AC$ имеют одинаковые характеристические многочлены для любой обратимой матрицы $C \in Mat_n(K)$. Выведите отсюда, что если $V \xrightarrow{\varphi} V$ — эндомоморфизм свободного модуля V с базисом e_i, то характеристический многочлен матрицы Φ_e гомоморфизма φ в этом базисе в действительности от выбора базиса не зависит (он называется *характеристическим многочленом гомоморфизма φ*.