Комплексные и вещественные пространства и эрмитовы формы

A17◇1. Для n-мерного векторного пространства W над полем $\mathbb{C}$ рассмотрим пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ как вещественное векторное подпространство в вещественном векторном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$. Найдите его коразмерность.

A17◇2. Для комплексного векторного пространства W обозначим через $\overline{W}$ векторное пространство, совпадающее с W как аддитивная абелева группа, но с умножением векторов на комплексные числа, заданным по формуле $z \bar{\cdot}\, w \overset{\text{def}}{=} \overline{z} \cdot w$. Покажите, что $\overline{W}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$, той же размерности, что и W и постройте канонический $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм $W \oplus \overline{W}$ с комплексифицированным овеществлением $W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

A17◇3. Для $\mathbb{C}$-линейного оператора $F : W \to W$ на комплексном векторном пространстве W обозначим через $F_{\mathbb{C}} : W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \to W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ комплексификацию вещественно линейного оператора $F_{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Выясните, как связаны друг с другом характеристические многочлены, собственные числа[1] и собственные векторы операторов F и $F_{\mathbb{C}}$. Если общий случай непонятен, начните с $W = \mathbb{C}$ (так что $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$) и $F : z \mapsto iz$.

A17◇4. Постройте изоморфизм групп $U_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

A17◇5. Приведите пример оператора на эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не переводится оператором в себя.

A17◇6. Докажите, что $(\ker F)^{\perp} = \mathrm{im}\, F^*$.

A17◇7. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ (сумма не обязательно ортогональная) и оператор F проектирует V на V_1 вдоль V_2. Покажите, что $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$ и F^* проектирует V на $V_2^{\perp}$ вдоль $V_1^{\perp}$.

A17◇8. Введём на пространстве многочленов $\mathbb{R}[x, y, z]$ такое скалярное произведение, чтобы базисные мономы $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ составляли ортогональный базис со скалярными квадратами $\alpha!\,\beta!\,\gamma!$.
а) Найдите оператор, сопряженный *оператору Лапласа* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. **б)** Покажите, что подпространство S^m однородных многочленов степени m раскладывается в прямую сумму вида $S^m = H_m \oplus \varrho^2 \cdot H_{m-2} \oplus \varrho^4 \cdot H_{m-4} \oplus \cdots$, где $H_m = \{f \in S^m \mid \Delta f = 0\}$ и $\varrho^2 \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2$.

A17◇9. На пространстве гладких периодических функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с периодом $T > 0$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^T f(x) g(x)\, dx$ вычислите операторы, сопряженные к оператору **а)** дифференцирования **б)** умножения на фиксированную гладкую T-периодическую функцию **в)** $L = a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x)$ где $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — заданные гладкие T-периодические функции.

A17◇10 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.

A17◇11. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны, и что любой ортонормированный набор собственных векторов можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.

A17◇12. Покажите, что всякий обратимый оператор F в евклидовом векторном пространстве единственным образом раскладывается в композиции $F = S_1 I_1 = I_2 S_2$, где операторы I_{ν} ортогональны, а S_{ν} — самосопряжены и имеют положительные собственные числа.

A17◇13. Докажите, что нормальность оператора F равносильна каждому из свойств: **а)** любой собственный вектор F собственный и для F^* **б)** $\forall v \in V\ |Fv| = |F^* v|$ **в)** ортогонал к любому F-инвариантному подпространству F-инвариантен **г)** всякое F-инвариантное подпространство F^*-инвариантно **д)** компоненты разложения F в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны **е)** компоненты полярного разложения оператора F перестановочны.

[1] обратите внимание, что характеристический многочлен оператора $F_{\mathbb{C}}$ имеет вдвое большую степень, чем характеристический многочлен оператора F, и собственных чисел у него, соответственно, тоже вдвое больше

Персональный табель ______________________________ . Листок №17 (30 апреля 2015)
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10			
11			
12			
13а			
б			
в			
г			
д			
е			