Определители

A8◇1. Вычислите $\operatorname{sgn}(n,\ (n-1),\ \dots\ ,\ 2,\ 1)$ и $\det\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

A8◇2. Пусть $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \operatorname{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$. Вычислите $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ и покажите, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

A8◇3. Вычислите определитель матрицы с 0 на главной диагонали и 1 в остальных местах.

A8◇4. Две строки матрицы 3×3-матрицы заполнены целыми числами так, что нод чисел в каждой из этих строке равен единице. Всегда ли третью строку этой матрицы можно заполнить целыми числами так, чтобы определитель матрицы оказался равным единице?

A8◇5. Сколько всего имеется **а)** 2×2 матриц заданного определителя над полем $\mathbb{F}_p$, p — простое **б)** невырожденных $n\times n$ матриц над полем из q элементов.

A8◇6. Числа $1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ n^2$ всевозможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n\times n$. Найдите сумму определителей всех этих матриц.

A8◇7. Покажите, что определитель 3-диагональной матрицы с 1 по главной диагонали и непосредственно над ней и -1 непосредственно под ней является числом Фиббоначчи.

A8◇8. Будем обозначать через $\big(f(i,j)\big)\in \operatorname{Mat}_n(K)$ квадратную матрицу, у которой элемент в пересечении i-той строки с j-тым столбцом равен $f(i,j)$, где $f\ :\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to K$ — формула, перерабатывающая пару натуральных чисел (i,j) в элемент $f(i,j)\in K$. Для двух заданных наборов чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ вычислите **а)** $\det\big(\alpha_i\beta_j\big)$ **б)** $\det\big(\cos(\alpha_i-\beta_j)\big)$ **в)** $\det\big(\alpha_i^{j-1}\big)$ **г)*** $\det\big(\alpha^{j-i-1 \pmod n}\big)$.

A8◇9 (теорема об окаймляющих минорах). Пусть матрица A содержит такую невырожденную квадратную подматрицу размера $m\times m$, что все содержащие её подматрицы размера $(m+1)\times(m+1)$ вырождены. Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$.

A8◇10. Вершины связного графа Γ занумерованы числами от 1 до n. Матрица $A_\Gamma = \big(a_{ij}\big)$ имеет диагональные элементы a_{ii}, равные числу ребер, сходящихся в i-той вершине, а остальные элементы a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Докажите, что $\det A = 0$, а все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу в предположении, что граф Γ дерево. Покажите, что Γ дерево, если и только если $A_{ii}=1$.

A8◇11. Для квадратной матрицы $A\in\operatorname{Mat}_n(K)$ многочлен $\chi_A(t)\overset{\text{def}}{=}\det(tE-A)\in K[t]$ называется *характеристическим.* **а)** Выразите его коэффициенты через миноры матрицы A. **б)** Покажите, что характеристический многочлен матрицы линейного оператора $F\ :\ V\to V$ не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица.

A8◇12. Пусть $AB=E$. Докажите соотношение $a_{IJ}=(-1)^{|I|+|J|}b_{\overline{J}\overline{I}}$ на дополнительные миноры.

A8◇13. Вычислите все частные производные $\dfrac{\partial^k\det(A)}{\partial a_{i_1j_1}\partial a_{i_2j_2}\dots\partial a_{i_kj_k}}$.

A8◇14. Для $A,B\in\operatorname{Mat}_n(K)$ докажите в $K[x,y]$ равенство $\det(xA+yB)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^ky^{n-k}\cdot\operatorname{tr}\big(\mathcal{A}_k\cdot\mathcal{B}_k^\vee\big)$, где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k^\vee$ суть матрицы размера $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$, у которых в позиции IJ стоят, соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|}a_{\overline{J}\overline{I}}$ к JI-минору матрицы B.

A8◇15. Покажите, что однородный грассманов многочлен ω степени 2 тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega\wedge\omega=0$.

A8◇16* **(соотношение Плюккера)**. Существует ли комплексная 2×4 матрица с 2×2 минорами **а)** $\{\,2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,\}$ **б)** $\{\,3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,\}$ (если да — приведите пример).

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок №8 (20 ноября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10			
11а			
б			
12			
13			
14			
15			
16а			
б			