Матрицы

А7◇1. В $\mathbb{Q}^4$ найдите размерность и какой-либо базис у суммы и пересечения подпространств:
а) $\operatorname{span}\big(\,(1,1,1,1)\,,\,(1,-1,1,-1)\,,\,(1,3,1,3)\,\big)$ и $\operatorname{span}\big(\,(1,2,0,2)\,,\,(1,2,1,2)\,,\,(3,1,3,1)\,\big)$
б) $\operatorname{span}\big(\,(1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,0)\,,\,(0,0,1,1)\,\big)$ и $\operatorname{Ann}\big(\,(1,0,1,0)\,,\,(0,2,1,1)\,,\,(1,2,1,2)\,\big)$
в) $\operatorname{Ann}\big(\,(1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,0))\,,\,(0,0,1,1)\,\big)$ и $\operatorname{Ann}\big(\,(1,2,0,2)\,,\,(1,2,1,2),\,,\,(3,1,3,1)\,\big)$

А7◇2. Выясните, является ли сумма подпространств $U, W \subset \Bbbk^n$ прямой, и если да, найдите проекции стандартных базисных векторов $\Bbbk^n$ на каждое из подпространств вдоль другого.
а) U задано уравнением $x_1 + x_2 + \dots = x_n = 0$, а W — системой $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
б) $U = \operatorname{span}\big(\,(1,1,1,1)\,,\,(-1,-2,0,1)\,\big)$, $W = \operatorname{span}\big(\,(-1,-1,1,-1)\,,\,(2,2,0,1)\,\big)$ в $\mathbb{Q}^4$.

А7◇3. На какую матрицу и с какой стороны надо умножить прямоугольную матрицу, чтобы **а)** её i-тая и j-тая строки поменялись местами **б)** её i-тая строка умножилась на λ **в)** к её i-той строке прибавилась j-тая, умноженная на λ **г)** то же, но со столбцами.

А7◇4 (теорема о ранге). Покажите, что у любой матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ размерность линейной оболочки её строк в $\Bbbk^n$ равна размерности линейной оболочки её столбцов[1] в $\Bbbk^m$.

А7◇5. Покажите, что каждая матрица ранга 1 **а)** является произведением столбца на строку **б)** пропорциональна своему квадрату, буде она квадратная.

А7◇6. Докажите для любых матриц $A \in \operatorname{Mat}_{k\times\ell}$, $B \in \operatorname{Mat}_{\ell\times m}$, $C \in \operatorname{Mat}_{m\times n}$ неравенства:
а) $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$ **б)** $\operatorname{rk}(AB) + \operatorname{rk}(BC) \leqslant \operatorname{rk}(ABC) + \operatorname{rk}(B)$ **в)** $\operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B) \leqslant \operatorname{rk}(AB) + \ell$.

А7◇7. Есть 7 одинаковых банок, каждая на $9/10$ заполнена краской одного из семи цветов радуги[2]. Можно ли переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое получить хоть в одной из банок колер, в котором все 7 красок смешаны в равной пропорции?

А7◇8 (коммутатор). Разность $[A,B] = AB - BA$ называется *коммутатором* квадратных матриц $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$. Докажите, что для любых $A, B, C \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ выполняются *правила Лейбница*:
а) $[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$ **б)** $[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]]$.

А7◇9. Выразите $(A+B)^n$ через A^iB^j, если **а)** $[A,B] = 0$ **б*)** $[A,B] = B$ **в*)** $[A,B] = A$.

А7◇10* (лемма Барта). Пусть $\operatorname{rk}[A,B] = 1$. Покажите, что у A и B есть общий собственный вектор[3].

А7◇11 (след). Сумма диагональных элементов $\operatorname{tr} A \overset{\text{def}}{=} \sum a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A. Покажите, что **а)** $\forall\, A, B \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ $\operatorname{tr}[A,B] = 0$ **б)** $\forall\, A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ и $\forall\, C \in \operatorname{GL}_n(\Bbbk)$ $\operatorname{tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{tr}(A)$ **в)** если $\operatorname{tr}(AX) = 0$ $\forall\, X \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ с $\operatorname{tr} X = 0$, то $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$.

А7◇12 (нильпотентные матрицы). Матрица $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что если A нильпотентна, то матрицы $E \pm A$ обратимы.

А7◇13. Нильпотентна ли сумма $A + B$ нильпотентных матриц A и B? Докажите, что да, если
а) $[A,B] = 0$ **б*)** $[A,[A,B]] = [B,[B,A]] = 0$.

А7◇14. Решите в $\operatorname{Mat}_2(\Bbbk)$ уравнения **а)** $X^2 = 0$ **б)** $X^3 = 0$ **в)** $X^2 = X$ **г)** $X^2 = E$ **д)** $X^2 = -E$.

А7◇15. Пусть матрица A диагональна, и все её диагональные элементы различны. Покажите, что любая матрица, коммутирующая с A, имеет вид $f(A)$ для некоторого $f(x) \in \Bbbk[x]$.

А7◇16. Покажите, что $\forall\, A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ $\exists\, f \in \Bbbk[x] : f(A) = 0$.

А7◇17. Для ненулевого $a \in \mathbb{C}$ вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$.

А7◇18. Напишите явную формулу для (ij)-того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной матрице (h_{ij}) с единицами по главной диагонали[4].

А7◇19. Пусть квадратные матрицы A, B, C, D обратимы. Явно вычислите $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$ в предположении, что $A - BD^{-1}C$, $C - DB^{-1}A$, $B - AC^{-1}D$, $D - CA^{-1}B$ тоже обратимы.

---

[1] эти размерности называются *рангом* и обозначается $\operatorname{rk} A$

[2] в каждой банке — свой цвет и все цвета разные

[3] т. е. такой столбец $v \in \mathbb{C}^n$, что $Av = \lambda v$ и $Bv = \mu v$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (мы считаем, что $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$)

[4] найдите ответ, пригодный и для матриц с элементами из *некоммутативного* кольца

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (6 ноября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
3			
4			
5а			
б			
6а			
б			
в			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10			
11а			
б			
в			
12			
13а			
б			
14а			
б			
в			
г			
д			
15			
16			
17			
18			
19			