Элементарные функции и степенные ряды

А4◇1. Пусть $g(x) = \prod(x-\alpha_i)$, где все α_i различны. Покажите, что для любого $f \in \Bbbk[x]$ с $\deg f < \deg g$ рациональная функция $f/g \in \Bbbk(x)$ равна сумме простейших дробей $\frac{f(\alpha_i)}{g'(\alpha_i)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_i}$.

А4◇2. Явно выразите через n коэффициент при t^n у формального степенного ряда:
а) $(2\,t^2 - 3\,t + 1)^{-1}$ **б)** $(t^4 + 2\,t^3 - 7\,t^2 - 20\,t - 12)^{-1}$ **в)** $\sqrt[3]{1+2t}$ **г)** $1/\sqrt{1-3t}$
д) $\mathrm{ch}(t) \overset{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ **е)** $\mathrm{sh}(t) \overset{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ **ж)** $\cos(t) \overset{\text{def}}{=} (e^{it} + e^{-it})/2$ **з)** $\sin(t) \overset{\text{def}}{=} (e^{it} - e^{-it})/2i$

А4◇3. Найдите k-тый члена последовательности $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ с $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

А4◇4*. Покажите, что все коэффициенты ряда $\mathrm{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$ положительны.

А4◇5. Покажите, ряд e^x не является отношением двух многочленов из $\mathbb{Q}[x]$.

А4◇6. Напишите ряд с коэффициентами 0 и 1, не являющийся рациональной функцией.

А4◇7. Обозначим через $p_m(n)$ число диаграмм Юнга веса n из $\leqslant m$ строк и положим $p_m(0) \overset{\text{def}}{=} 1$. Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$ и покажите, что $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_m(n)\,t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

А4◇8* **(теорема Эйлера о пятиугольных числах)**. Обозначим число всех диаграмм Юнга веса n через $p(n)$, а число диаграмм из чётного (соотв. нечётного) количества строк разной длины — через $\hat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\hat{p}_{\text{н}}(n)$. Пусть $p(0) \overset{\text{def}}{=} 1$ и $P(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} p(n)t^n \in \mathbb{Q}[[t]]$. Покажите, что **а)** $P(t) = \prod\limits_{k\geqslant 1}(1-t^k)^{-1}$
б) $1/P(t) = 1 + \sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\hat{p}_{\text{ч}}(n) - \hat{p}_{\text{н}}(n)\right)\cdot t^n$ **в)** $p(n) = \sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\left(p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right)$.
г) Вычислите $p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3)$.

А4◇9*. В выпуклом n-угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

А4◇10 (действие $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ на $\mathbb{Q}[x]$). Убедитесь, что для каждого ряда $F(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ корректно определено отображение $\widetilde{F} \overset{\text{def}}{=} F\left(d/dx\right) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $g \mapsto a_0 g + a_1 g' + a_2 g'' + a_3 g''' + \cdots$ и что оно *линейно*: $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{F} f + \mu \widetilde{F} g\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ и $\forall\, f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Выразите коэффициенты многочлена $F_m(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F} x^m$ через коэффициенты ряда F и покажите, что ряд F однозначно восстанавливается по набору многочленов F_m.

А4◇11*. Покажите, что линейное отображение $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ имеет в вид $\widetilde{F}$ для некоторого $F \in \mathbb{Q}[[t]]$ тогда и только тогда, когда оно перестановочно со всеми сдвигами $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

А4◇12 (ряд Тодда и числа Бернулли). Ряд $\mathrm{td}(t) \overset{\text{def}}{=} t/(1-e^{-t}) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{a_k}{k!}\, t^k$ называется *рядом Тодда*. Числа $b_1 \overset{\text{def}}{=} -a_1$ и $b_k \overset{\text{def}}{=} a_k$ при $k \geqslant 2$ и называются *числами Бернулли*. Явно вычислите:
а) функцию $\left((\mathrm{td}(t) - \mathrm{td}(-t)\right)/2$ **б)** все числа a_{2k+1} **в)** все числа b_k с $k \leqslant 12$.

А4◇13. Покажите, что: **а)** при $k \geqslant 2$ имеется рекурсивная формула[1] $1 + \sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\binom{k}{\nu} b_\nu = 0$
б*) числа b_{2k} (с чётными номерами) образуют знакопеременную последовательность.

А4◇14 (суммирование степеней). Убедитесь, что при каждом $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ имеется единственный многочлен $S_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$ без свободного члена с $S'_m(x) = \mathrm{td}(d/dx)\, x^m$, после чего
а) докажите $\forall\, n \in \mathbb{N}$ равенство $0^m + 1^m + 2^m + \cdots + n^m = S_m(n)$
б) напишите явные формулы суммирования m-тых степеней первых n натуральных чисел для всех $1 \leqslant m \leqslant 6$.

[1] эту формулу часто изображают мнемоническим равенством $b^{\downarrow k} = \left(1 + b^{\downarrow}\right)^k$, где значок $b^{\downarrow}$ указывает на то, что показатели при букве b следует писать не верхними индексами, а нижними, и воспринимать не как степени, а как номера чисел Бернулли

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок №4 (25 сентября 2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
13а			
б			
14а			
б			