И.В. Артамкин
А.Л. Городенцев
А.Г. Кулаков
М.А. Прохоров
С.М. Хорошкин
А.В. Хохлов

Числа и суммы

(*пособие для факультативных занятий по математике в 7–8 классе средней школы*)

... , , , , , , . , , , . , .

, , ; , , . : , ; ; , , ...

. . 1.

Содержание

Введение

Эта книга о том, как складывать числа. Скорее всего, Вы уверены, что это очень просто. И это, конечно, так, если надо сложить два или три числа. Сложение десяти чисел представляется уже довольно скучным занятием. Отыскать же сумму первых ста натуральных чисел хватит терпения лишь у немногих. Но эта задача решается за несколько секунд, если только догадаться до «правильного» способа действий! А как найти сумму квадратов первых ста натуральных чисел? Прочитав эту книгу, Вы сможете решать как эти, так и многие другие задачи. Вы научитесь вычислять разнообразные суммы, находить замечательные закономерности в рядах чисел и записывать их в виде красивых математических формул. Вы узнаете о представлении чисел геометрическими фигурами, о Пифагоровой таблице умножения, о многоугольных числах и других ярких образах, заложенных в фундамент математики еще древними греками.

Как читать эту книгу. Занятие математикой — это деятельность активная. И подобно тому, как нельзя научиться водить автомобиль, ни разу не посидев за рулем, нельзя научиться математике, не решая задачи. Задачи составляют значительную часть этой книги и, работая над книгой, Вы должны стараться их решить. Не страшно, если при этом Вам будут помогать друзья или учитель (некоторые задачи довольно трудные). Отчасти Вам поможет и сама книга — значительная часть основного текста (кроме задач из § 11) снабжена указаниями и ответами. Однако очень важно, чтобы эта помощь не лишила Вас того удовольствия, которое получаешь самостоятельно докопавшись до решения!

Если в какой-то момент Вам покажется, что то, что Вы читаете, Вам уже хорошо известно, а предлагаемые задачи слишком просты, — загляните в конец § 5 или в §§ 9, 11. Решения имеющихся там задач (самые трудные из них отмечены звездочкой) могут занять много времени, а то и оказаться не по силам даже профессиональным математикам. Не отчаивайтесь, если они не решаются, — попробуйте еще раз!

И последнее. Книгу не обязательно читать подряд «от корки до корки». Начать работать с ней можно и с середины (например, с § 4 или с § 6), и с конца (§ 9 или § 10) и даже одновременно с нескольких мест. Довольно скоро Вы заметите, что в разных частях книги с разных точек зрения обсуждаются одни и те же вещи. Если какой-то способ рассуждать пришелся Вам особенно по вкусу, то постарайтесь применять его почаще и овладеть им, но не забывайте, что настоящий мастер прекрасно владеет всеми доступными инструментами!

§ 1 Формулы и площади

Конечно, всем хорошо знакома формула для площади прямоугольника со сторонами a и b, утверждающая, что $S = a \cdot b$. Оказывается, эту формулу можно использовать не только для вычисления площадей, но и для иллюстрации и даже доказательства различных алгебраических или арифметических теорем. Так, например, простейшую формулу сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \qquad (1\text{-}1)$$

можно понимать как утверждение о том, что если из квадрата размером $a \times a$ вырезать квадрат размером $b \times b$, то полученная фигура будет иметь ту же площадь, что и прямоугольник со сторонами $a+b$ и $a-b$.

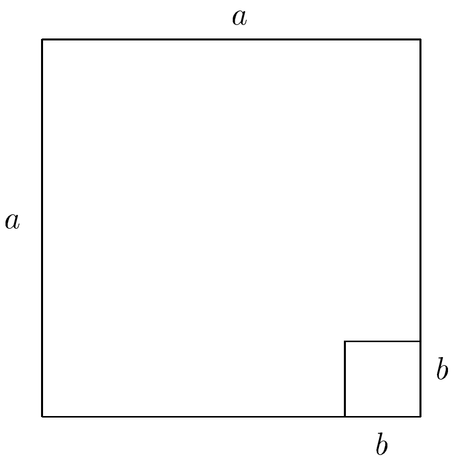


Рис. 1.1. $a^2 - b^2$.

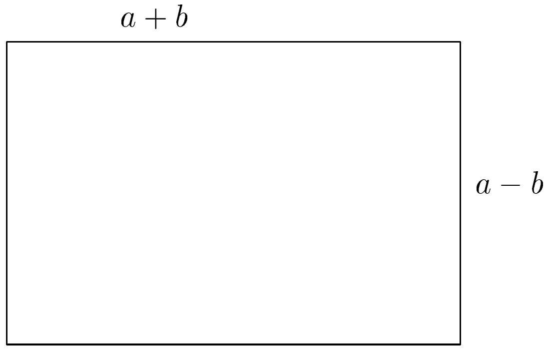


Рис. 1.2. $(a + b)(a - b)$.

Аналогично, формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно воспринимать как утверждение о том, что квадрат со стороной $a + b$ можно разрезать на четыре части: два квадрата со сторонами a и b и два прямоугольника размером $a \times b$:

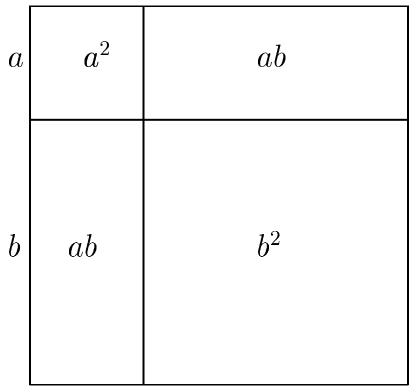


Рис. 1.3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

и показанный на рис. 1.3 способ разрезания *доказывает* эту формулу. Точно так же и формулу (1-1) для разности квадратов можно доказать, разрезав фигуру на рис. 1.1 на куски и сложив затем из этих кусков фигуру на рис. 1.2.

Задача 1.1. Докажите формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ разрезанием и складыванием. Можно ли при этом обойтись ровно одним разрезом?

Вообще, хорошая картинка часто бывает намного убедительнее длинных формальных алгебраических выкладок и гораздо лучше запоминается.

Задача 1.2. Придумайте геометрическое доказательство формулы

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

Задача 1.3. Придумайте картинку, дающую формулу для $(a + b + c)^2$, и напишите эту формулу.

Задача 1.4. Найдите формулу для[1] $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$.

[1]Вместо употребления разных букв алфавита в математике принято (особенно, если букв не хватает) использовать «нумерованные буквы» (буквы с индексами): $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

§ 2 Числа и фигуры

В задачах о целых числах особенно приятно рисовать картинки на клетчатой бумаге. Если стороны многоугольника идут по линиям клетчатой бумаги, то его площадь будет равна числу клеток, из которых он состоит. Например, прямоугольник с целыми сторонами a и b, идущими по линиям клеток, состоит в точности из ab клеток. Интересно, что древние греки именно таким образом и представляли себе таблицу умножения, рисуя ее как показано на рис. 2.1. Где в этой таблице расположены квадраты целых чисел? Есть ли у нее ось симметрии? Встречаются ли в таблице различные прямоугольники, состоящие из одинакового числа клеточек?

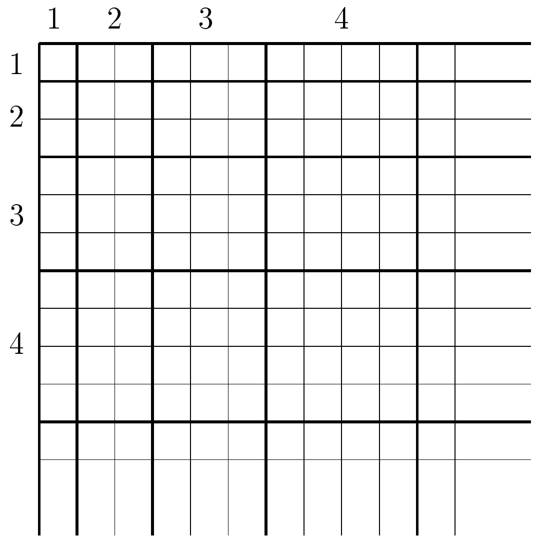


Рис. 2.1. Пифагорова таблица умножения (VI в. до Р.Х.).

Задача 2.1. Дайте геометрическое доказательство переместительному закону умножения: $ab = ba$, т. е. объясните, почему выполняется равенство

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ раз}} = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ раз}}$$

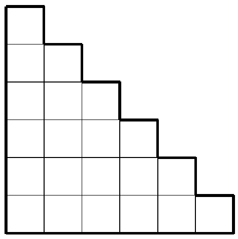
Задача 2.2. Сколько существует различных прямоугольников, состоящих ровно из 12 клеточек? Какие из них не попали в таблицу умножения на рис. 2.1?

Задача 2.3. Найдите такое наименьшее число n, что существует ровно пять различных прямоугольников, состоящих ровно из n клеточек.

Изображение чисел фигурками на клетчптой бумаге связывает с многими числами яркие геометрические образы. Так, числа вида $a \cdot a$ с античных времен называются квадратами.

Задача 2.4. Выпишите первые 13 квадратов целых чисел и найдите среди них квадраты, являющиеся суммами двух других квадратов.

Помимо квадратов, пристальное внимание древнегреческих математиков привлекали треугольные числа T_n, равные количеству клеток в прямоугольных ступенчатых треугольниках типа показанного на рис. 2.2. Первые несколько треугольных чисел изображены на рис. 2.3



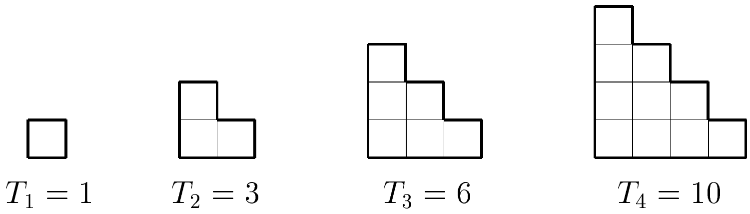


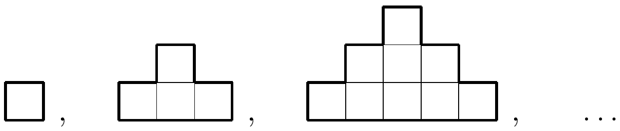
Рис. 2.2. Треугольное число. Рис. 2.3. Начало ряда треугольных чисел.

Задача 2.5. Продолжите этот ряд и найдите первые 10 треугольных чисел.

Задача 2.6. Что за числа будут получаться при сложении пар последовательных треугольных чисел: $T_1 + T_2$, $T_2 + T_3$, $T_3 + T_4$, ... ? Сформулируйте соответствующую теорему и докажите ее геометрически.

Задача 2.7. Сложите прямоугольник из двух одинаковых ступенчатых треугольников T_n. Каковы его стороны? Получите отсюда явную формулу для T_n.

Задача 2.8. На рис. 2.4 изображен ряд «симметричных» ступенчатых треугольников. Сколько клеточек в каждой такой фигуре? Каким рядом чисел выражаются их площади? Как это объяснить геометрически?



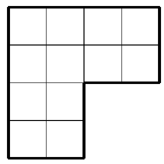


Рис. 2.4. Симметричные треугольники. Рис. 2.5. Уголок.

Задача 2.9. Как разрезать уголок на рис. 2.5 на четыре равные[1] части? ([2])

Задача 2.10. Как разрезать прямоугольник 9 x 16 на две части, из которых можно сложить квадрат?

Задача 2.11. Докажите теорему Диофанта: $8\,T_n + 1 = (2n+1)^2$ (например: $8 \cdot 1 + 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2$, $8 \cdot 3 + 1 = (2 \cdot 2 + 1)^2$ и т. д.).

Интересно найти геометрическое решение зад. 2.11: как разрезать квадрат с произвольной нечетной стороной на 8 одинаковых ступенчатых треугольников и один лишний квадратик?

Мы уже видели, что получается, если из квадрата со стороной $a+b$ вырезать два квадрата со сторонами a и b (см. рис. 1.3). А что получится, если от ступенчатого треугольника со стороной $m+n$ отрезать треугольник со стороной m и треугольник со стороной n?

Задача 2.12. Докажите теорему сложения треугольных чисел: $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

[1]Напомним, что две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.
[2]Утешительная версия этой задачи: разрежьте квадрат на пять равных частей.

§ 3 Разрезания и суммы

Подсчитаем, из скольких клеточек состоит ступенчатый треугольник высотой в n клеточек. Для этого разрежем его на горизонтальные полоски шириной в одну клеточку:

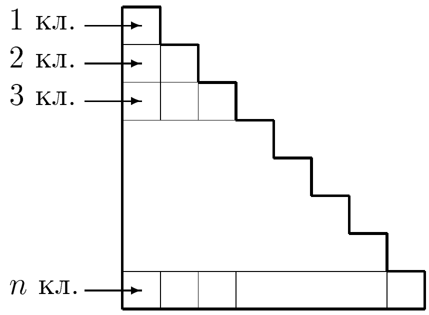
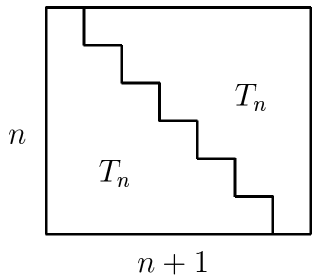


Рис. 3.1. Разрезание треугольного числа на полоски.

Самый верхний этаж состоит из одной клеточки, следующий — из двух, потом — из трех и т. д. На самом нижнем, n-ом этаже, лежит полоска из n клеток. Таким образом, $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$, то есть n-ое треугольное число представляет собой сумму последовательных чисел от 1 до n. Но в зад. 2.7 мы уже вычислили треугольное число T_n, разрезав прямоугольник $n \times (n+1)$ на два ступенчатых треугольника:



$$2\,T_n = n(n+1)$$

Рис. 3.2. Формула для n-того треугольного числа.

Мы получили знаменитую формулу: $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Посмотрим теперь, что получится, если аналогичным образом разрезать «симметричный» ступенчатый треугольник высоты n (см. зад. 2.8 и рис. 3.3).

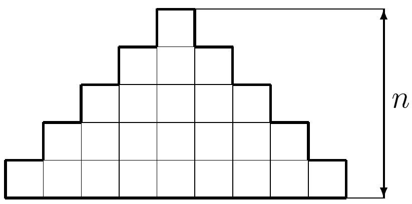


Рис. 3.3. Разрезание симметричного треугольника на полоски.

Задача 3.1. Сколько клеточек в k-ом, считая сверху, этаже? А в самом нижнем этаже? Напишите соответствующую сумму (т. е. представьте площадь фигуры на рис. 3.3 в виде суммы n слагаемых).

Задача 3.2. В зад. 2.8 и зад. 3.1 мы двумя способами посчитали площадь симметричного ступенчатого треугольника. Какую формулу для суммирования мы при этом получили? Выпишите ее явно.

Задача 3.3. Предложите «ступенчатую картинку» для вычисления суммы последовательных нечетных чисел $\underbrace{1+5+9+13+\cdots}_{n\text{ слагаемых}}$ и напишите соответствующую формулу.

Разумеется, фигуры можно разрезать не только на прямолинейные полоски, но и, скажем, на «уголки» (греки называли Г-образные фигурки «гномонами»).

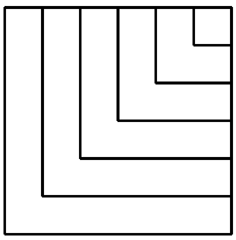


Рис. 3.4. Разрезание квадрата.

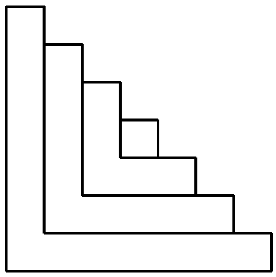
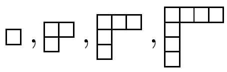


Рис. 3.5. Разрезание треугольника.

Задача 3.4. Рассмотрим ряд «равносторонних» гномонов:  , ... Сколько клеточек в k-том из них? Пользуясь рис. 3.4, еще раз докажите формулу $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$.

Задача 3.5. Какая сумма соответствует показанному на рис. 3.5 способу разрезания ступенчатого треугольника (гипотенуза которого состоит из нечетного числа $n=2\ell+1$ клеток)?

Есть и другие любопытные способы разрезания прямоугольников и квадратов.

Задача 3.6. Из скольких клеток состоит «рамка» размера $n\times n$ с рис. 3.6? Какая сумма получится при разрезании квадрата $n\times n$ на такие рамки? (Обратите внимание на то, что n бывает четным и нечетным!)

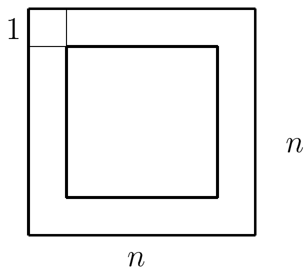


Рис. 3.6. «Рамка».

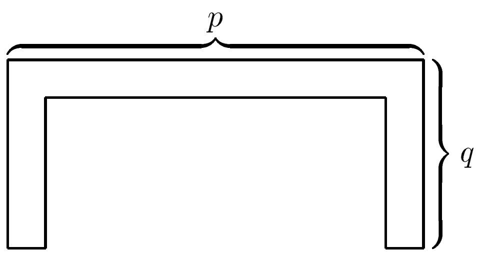


Рис. 3.7. «Ворота».

Задача 3.7. Придумайте различные варианты разрезания прямоугольников и квадратов на прямоугольные «рамки» (рис. 3.6) или «ворота» (рис. 3.7) и напишите формулы для соответствующих сумм.

Задача 3.8. Найдите площадь Пифагоровой таблицы умножения (см. рис. 2.1) чисел от 1 до n. Что за тождество получится, если разрезать эту таблицу по жирным линиям на «толстые» уголки? (Советуем сначала подсчитать площадь k-того уголка.)

§ 4 Арифметическая прогрессия

Знаменитая математическая легенда гласит, что в 1787 году в одной из саксонских народных школ произошел такой случай. Учитель, желая занять учеников на целых урок, предложил им сложить все натуральные числа от одного до ста.

Задача 4.1. Чему равна сумма $1 + 2 + 3 + \cdot + 100$?

Не успел учитель написать условие задачи на доске, как один из учеников встал и положил на учительский стол свою грифельную доску с ответом. Следует заметить, что в народных школах каждый ученик имел свою именную грифельную доску. Когда ученик выполнял задание, он клал свою грифельную доску в стопку на стол учителя сверху. Проверяя решения, учитель знал, что ученик, чья доска легла сверху, сделал решение последним, а тот, чья доска лежит снизу — первым. Естественно, учитель поначалу очень рассердился, решив, что ученик поленился считать аккуратно и сдал свою доску для того, чтобы отделаться от задания. Однако, к удивлению учителя правильный ответ был написан только на грифельной доске, лежащей в самом низу. Ученика, быстро и правильно решившего задачу, звали Карл Фридрих Гаусс. Впоследствии он стал одним из самых известных математиков мира.

В этой истории немало вопросов. Как удалось юному Гауссу так быстро сосчитать сумму ста чисел? Почему правильный ответ был только у него? Ошибки остальных учеников легко понять и простить: ведь они сто раз складывали числа; ни разу не ошибиться здесь очень трудно. Гаусс же, по-видимому, вместо этого перемножил какие-то два числа, например, так:
Первое решение задачи 4.1 (способ Гаусса): Напишем сумму два раза, только второй раз в обратном порядке, и сложим числа в столбик:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2\,S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Поскольку таких слагаемых 100 штук, $2\,S = 100 \cdot 101$. Следовательно,

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050\,.$$

Очень похоже на правду, что Гаусс именно так вычислил эту сумму — ведь умножить 50 на 101 легко и в уме. Но можно предложить и другие способы решения задачи 4.1.
Второе решение задачи 4.1. Сгруппируем слагаемые не так, как они написаны в условии задачи, а по другому:

$$100 + (99 + 1) + (98 + 2) + \ \cdots\ + (51 + 49) + 50 = \\ = 100 + 100 \cdot 9 + 50 = 100 \cdot 50 + 50 = 5050$$

Можно было бы группировать слагаемые и так:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Задача 4.2. Посчитайте вторым способом сумму $1 + 2 + 3 + \cdots + 49$ и проверьте ответ методом Гаусса.

Задача 4.3. Какими геометрическими картинками можно изобразить первый и второй способы решения задачи 4.1?

Задача 4.4. Вычислите суммы:

а) $1+2+3+4+\cdots+999+1000$

б) $101+102+103+\cdots+200$

в) $101+103+105+\cdots+197+199$

г) $400+401+402+\cdots+700$

Попробуем теперь выяснить, какое свойство слагаемых позволило юному Гауссу так быстро сосчитать сумму ста чисел. Для этого попытаемся методом Гаусса найти сумму чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k$:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & +\cdots+ & a_{k-1} & + & a_k \\ S & = & a_k & + & a_{k-1} & + & a_{k-2} & +\cdots+ & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2\,S & = & (a_1+a_k) & + & (a_2+a_{k-1}) & + & (a_3+a_{k-2}) & +\cdots+ & (a_{k-1}+a_2) & + & (a_k+a_1) \end{array}$$

Чтобы метод Гаусса работал, нужно, чтобы все скобки были равны друг другу:

$$a_1+a_k=a_2+a_{k-1}=a_3+a_{k-2}=\ \cdots$$

Это свойство выполняется, например, для таких последовательностей:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ ,\ 1000\ ,$$
$$101,\ 103,\ 105,\ \ldots\ ,\ 197,\ 199\ ,$$
$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots\ ,\ 135\ ;$$

и вообще для всех последовательностей, у которых разность между соседними членами постоянна.

Задача 4.5. Докажите, что если $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ \cdots\ =a_k-a_{k-1}$, то и $a_1+a_k=a_2+a_{k-1}=a_3+a_{k-2}=\ \cdots$.

Определение. *Последовательность, каждый следующий член которой получается из предыдущего добавлением одного и того же числа d, называется арифметической прогрессией, а это число d называется разностью арифметической прогрессии.*

Таким образом, в арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с разностью d мы имеем $d=a_2-a_1=a_3-a_2=\ \cdots\ =a_k-a_{k-1}$.

Задача 4.6. Докажите, что сумма членов конечной арифметической прогрессии равна полусумме первого и последнего членов, умноженной на количество слагаемых, т. е. что $S=n\,(a_1+a_n)/2$.

Название «арифметическая прогрессия» связано с тем, что каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому двух своих соседей.

Задача 4.7. Докажите это, т. е. проверьте выполнение равенства $a_i=(a_{i-1}+a_{i+1})/2$ для каждого $i=2,\ 3,\ \ldots\ ,\ (k-1)$.

Задача 4.8. Докажите и обратное: если в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ каждый член, кроме двух крайних, равен среднему арифметическому своих соседей, то такая последовательность является арифметической прогрессией.

Задача 4.9. Найдите суммы:

а) первых ста нечетных положительных чисел;

б) первых двухсот четных положительных чисел;

в) первых пятидесяти положительных чисел, дающих остаток 1 от деления на 3;

г) всех трехзначных чисел, делящихся на 13.

Задача 4.10. Выясните, чему равно:

а) 1990-ое четное положительное число;

б) 109-ое нечетное положительное число;

в) n-ое четное положительное число;

г) n-ое нечетное положительное число;

д) n-ое положительное число с остатком 1 от деления на 4;

е) n-ое положительное число с остатком 6 от деления на 8.

Задача 4.11. Чему равен n-ый член арифметической прогрессии, начинающейся с a_1 и имеющей разность d?

Задача 4.12. В чемпионате по футболу участвовало 16 команд. Чемпионат проводился по круговой системе в два круга — это означает, что каждая команда играла с каждой два матча. Сколько всего матчей было сыграно? Сколько всего очков было разыграно, если за победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение 0 очков?

Задача 4.13. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

Задача 4.14. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Задача 4.15. На сколько частей делят плоскость n прямых, любые две из которых пересекаются, однако никакие три не пересекаются в одной точке?

Многоугольные числа. Упоминавшиеся нами ранее треугольные числа $T_1 = 1$, $T_2 = 1+2 = 3$, $T_3 = 1+2+3 = 6$, $T_4 = 1+2+3+4 = 10$, … можно было бы рисовать так:

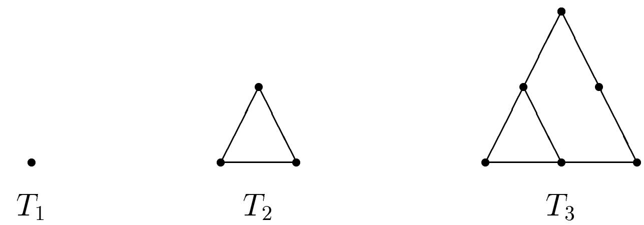


Рис. 4.1. Треугольные числа.

Подобным же образом можно рисовать и четырех-, и пяти-, и шести-, и вообще, n-угольные числа. Вот, например, картинки для четырехугольных чисел:

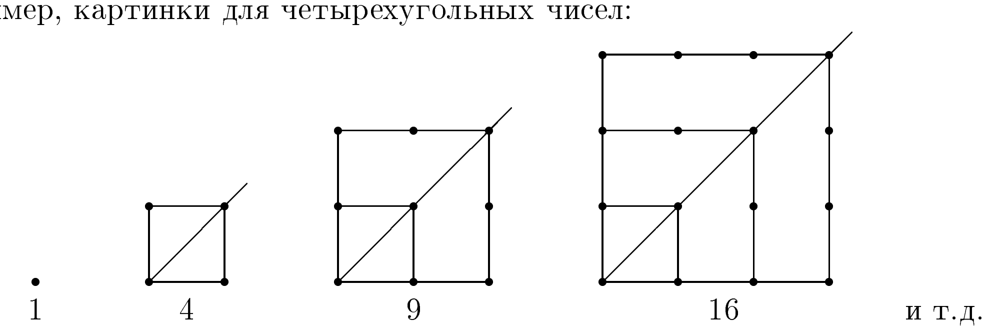


Рис. 4.2. Четырехугольные числа.

Таким образом, четырехугольные числа — это просто квадраты. Пятиугольные числа $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, ... выглядят так:

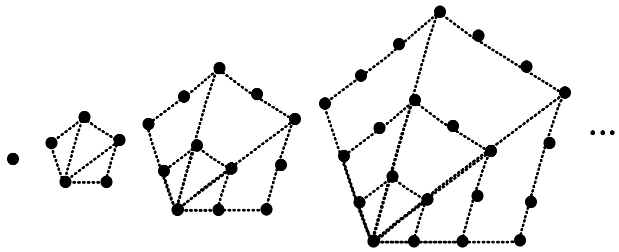


Рис. 4.3. Пятиугольные числа.

Задача 4.16. Нарисуйте и вычислите первые 4 шестиугольных числа.

Задача 4.17. Суммами каких арифметических прогрессией являются пяти- и шестиугольные числа? А k-угольные числа? Напишите формулу для n-ого пяти-, шести-, семи- и k-угольного чисел.

Задача 4.18.

а) Докажите, что n-ое шестиугольное число на n меньше, чем сумма n-ого треугольного и пятиугольного чисел. Попробуйте решить эту задачу двумя способами: алгебраически и геометрически.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для семи- и восьмиугольных чисел.

в) Верно ли, что сумма n-тых $(k+1)$-угольного и $(l+1)$-угольного чисел на n больше n-того $(k+l)$-угольного числа?

Задача 4.19. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на 1/2 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

§ 5 Угадай ответ

Вопреки расхожему мнению, математика — это во многом экспериментальная наука. Только эксперименты математики проводят не сливая, поджигая или взрывая что-нибудь, а в уме, на бумаге, или, в крайнем случае, на компьютере. В этом разделе мы предлагаем Вам поэкспериментировать для того, чтобы угадать ответ в задаче. Говорят, что ответ — это больше, чем половина решения задачи, ибо часто так случается, что обосновать «правильно» сформулированный ответ уже совсем не так сложно.

Задача 5.1. Вычислите сумму $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$.

Попытайтесь найти эту сумму экспериментальным путем, а именно: вычислите сначала суммы первых двух, затем — первых трех, затем — четырех и т. д. слагаемых[1]. Для наглядности результаты эксперимента разумно записывать в таблицу[2]:

[1] Обычно, когда математика просят сложить сто чисел, он говорит: «Сложить сто чисел — это очень долго и сложно, давайте-ка я лучше сложу два числа, посмотрю внимательно на ответ; сложу три числа — и еще внимательнее посмотрю на ответ... А там, глядишь, что-нибудь и придумаю!»

[2] В ней можно было бы обойтись и без второй строчки, но она помогает вычислить сумму и подметить закономерность

Число слагаемых	1	2	3	4	5	6
Последнее слагаемое	1/2	1/6	1/12			
Сумма	1/2	2/3				

Если Вы внимательно посмотрите на результаты эксперимента, то легко догадаетесь, чему будут равны суммы и пятидесяти, и девяносто девяти, и ста слагаемых.

Задача 5.2. Чему равна сумма $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$?

Если Вы угадали ответ к этой задаче, подметив закономерность у сумм двух, трех, четырех, пяти слагаемых (возможно, кто-то выписал и больше экспериментальных данных), то этот ответ полезно проверить[1]. Такую проверку можно делать, опять-таки, подставляя в предлагаемую Вами формулу маленькие значения n. Например, проверка формулы $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ для $n=1,\,2,\,3,\,4$ выглядит так:

$$\begin{array}{ll} n=1 & 1=1^2 \\ n=2 & 1+3=2^2 \\ n=3 & 1+3+5=3^2 \\ n=4 & 1+3+5+7=4^2 \end{array}$$

Подобная проверка позволяет отвергать заведомо неправильные гипотезы.

Задача 5.3. Проверьте Ваш и наш[2] ответ в задаче 4.2 при $n=1,\,2,\,3,\,4$, а затем попытайтесь *строго доказать* его.

Указание: Для доказательства, можно, к примеру, посмотреть, на сколько увеличивается Ваш гипотетический ответ при прибавлении еще одного слагаемого и сравнить это с тем числом, на которое увеличивается сумма на самом деле — здесь-то и пригодится 2-ая строка из Ваших таблиц.

Задача 5.4. Чему равна сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$? Не забудьте проверить ответ хотя бы при $n=1,\,2,\,3$!

Задача 5.5. Вычислите сумму $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{3^n}$.

Задача 5.6. Сосчитайте $1+2+4+\cdots+2^n$ и $1+3+9+27+\cdots+3^n$.

Напомним, что $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n$ (читается «эн факториал»); чтобы освоиться с факториалами, советуем посчитать $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$ и $(n+2)!/n!$.

Задача 5.7. Найдите $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$ и $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}$.

Задача 5.8. Подсчитайте сумму $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

Треугольник Паскаля. Рассмотрим бесконечно продолжающийся вниз треугольный лабиринт, нарисованный на рис. 5.1. Условимся нумеровать его этажи сверху вниз, начиная с нулевого номера, а комнаты на каждом этаже — слева направо, также начиная с нулевого номера.

[1] Конечно, для этого проще всего заглянуть в конец книги, но что делать, если ответа там нет?!

[2] т. е. приведенный в конце книжки

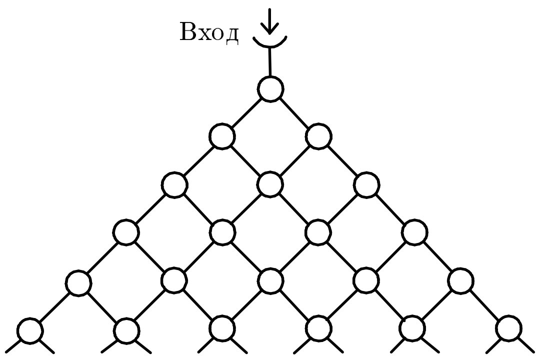


Рис. 5.1. Лабиринт Паскаля.

Задача 5.9. Пусть в лабиринт на рис. 5.1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей (с нулевого по десятый) напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

Задача 5.10. Сформулируйте и докажите правило, позволяющее в предыдущей задаче быстро заполнять числами очередной этаж, глядя на предыдущий (уже заполненный) этаж.

Числовой треугольник, дающий ответ к зад. 5.9 и зад. 5.10, называется *треугольником Паскаля.* Он удивительным образом появляется в самых разных (на первый взгляд) ситуациях.

Задача 5.11. Найдите на треугольнике Паскаля ряд единиц $1,\ 1,\ 1,\ \dots$, натуральный ряд $1,\ 2,\ 3,\ \dots$, а также ряд треугольных чисел $T_1,\ T_2,\ T_3,\ \dots$.

Задача 5.12. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые у

$$(1+x)^2, \quad (1+x)^3, \quad (1+x)^4, \quad \dots, \quad (1+x)^{10}$$

(например: $(1+x)^4 = (1+x)^3(1+x) = (1+3x+3x^2+x^3)(1+x) = 1+4x+6x^2+6x^3+x^4$.) Сравните Ваши результаты с результатами зад. 5.9. Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.

Задача 5.13. Сформулируйте и докажите правило для раскрытия скобок у $(a+b)^n$ при помощи треугольника Паскаля.

Разбиения в суммы квадратов. Поэкспериментируем теперь с многоугольными числами. Уже две с половиной тысячи лет назад математиков стали занимать вопросы такого рода: какие числа можно представить в виде суммы двух треугольных чисел, а какие нельзя? А какие числа можно представить в виде суммы двух или трех квадратных чисел? Какие числа можно представить в виде суммы треугольного, квадратного и пятиугольного? Условимся при этом считать многоугольным числом и нуль, поставив его в ряды треугольных, четырехугольных, пятиугольных и т. п. чисел под нулевым номером.

Задача 5.14. Выясните, какие из первых ста чисел представляются, а какие не представляются в виде суммы а) двух б) трех треугольных чисел[1]. Четко сформулируйте возникшие у Вас гипотезы и проверьте их на второй сотне чисел.

Теперь нам опять потребуется клетчатая бумага. Будем считать, что сторона клетки равна 1. Тогда площадь клетки тоже будет равна 1. Назовем «прямым» квадрат, стороны которого

[1]Подумайте над тем, какая таблица облегчила бы Вам работу в этой задаче и как в экспериментах пункта (б) можно использовать результаты экспериментов из пункта (а).

идут по линиям клетчатой бумаги, а вершины расположены в узлах клеток. Квадрат с вершинами в узлах клеток, но сторонами *не параллельными* линиям бумаги мы будем называть «косым» (см. рис. 5.2).

Задача 5.15. Нарисуйте косые квадраты с площадями 2, 5, 17 (и *докажите*, что нарисованные Вами четырехугольники действительно являются квадратами!).

Задача 5.16. Верно ли, что площадь любого косого квадрата — целое число?

Задача 5.17. Существуют ли косые квадраты площади 3 и 7?

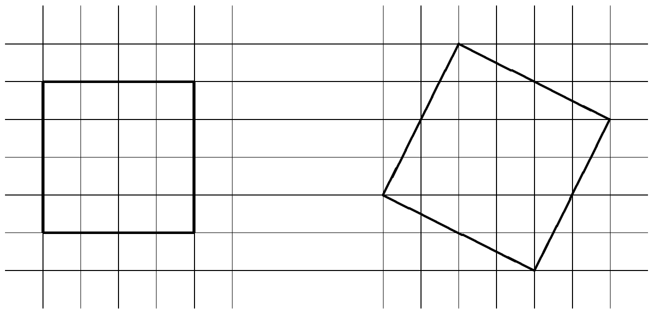


Рис. 5.2. Прямой и косой квадраты.

Задача 5.18*. Какие числа из первой сотни являются площадями косых или прямых квадратов?

Задача 5.19*. Какие числа из первой сотни представляются в виде суммы двух квадратов? Выпишите все эти числа и разложите их на простые множители. Глядя на свои экспериментальные данные, выясните:

а) какой остаток от деления на 4 имеют те простые множители, которые входят в Ваши разложения в нечетных степенях;

б) верно ли, что если два числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение тоже представляется в виде суммы двух квадратов.

Задача 5.20*. Какие числа из первой сотни можно представить в виде суммы трех квадратов, а какие нельзя? Какие простые множители и с какими показателями встречаются в разложении тех и других чисел?

Рассматривая представления целых чисел в виде суммы квадратов, Лагранж доказал следующую замечательную теорему[1].

Теорема Лагранжа: *каждое натуральное число является суммой четырех квадратов (среди которых могут быть и нулевые).*

Задача 5.21. Проверьте эту теорему для чисел из первой сотни.

Задача 5.22. Решая зад. 2.4 и зад. 2.5, Вы, наверное, заметили, что среди первых десяти треугольных чисел встречаются и квадраты, например, 1, но есть и еще. Какое? Постарайтесь найти и еще одно (третье) одновременно треугольное и квадратное число.

Задача 5.23*. Как найти все одновременно треугольные и квадратные числа? Конечно ли их число?

[1]Впрочем, хоть эта теорема и носит имя Лагранжа, она, видимо, была известна еще Диофанту. Ее доказательство и дальнейшие подробности можно прочитать в замечательной книге: *К. Айерленд, М. Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел.* М., «Мир», 1987.

§ 6 Бесконечные десятичные дроби

Вы, наверное, знаете, что существуют числа рациональные и иррациональные. Напомним, что число r называется *рациональным*, если его можно представить о виде обыкновенной дроби, т. е. в виде отношения двух целых чисел $r = p/q$. В противном случае, число r называется *иррациональным*. Например, числа $-196/17$, $1/2$, $1/3$, а также $1 = 1/1$, $0 = 0/1$ — рациональные, тогда как число $\sqrt{2}$ — иррациональное, его нельзя представить в виде обыкновенной дроби. Часто вместо обыкновенных дробей используются десятичные дроби. Чтобы представить, скажем, $1/3$ в виде десятичной дроби необходимо выполнить деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1{,}0 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{9} & 0,333\ldots \\
-\,10 & \\
\underline{9} & \\
-\,10 & \\
\underline{9} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Этот процесс можно продолжать до бесконечности, так что в ответе мы получаем бесконечную десятичную дробь. Такую дробь называется *периодической*, поскольку ее запись, начиная с некоторого места, состоит из бесконечно повторяющейся цифры 3. Иногда это обозначают так: $0,(3)$ и говорят «ноль целых и три в периоде», но мы будем чаще придерживаться обозначения $0,333\ldots$, где точки говорят о том, что тройка повторяется до бесконечности.

Рассмотрим еще один пример: $5\,\dfrac{17}{37} = 5 + \dfrac{17}{37}$; делим 17 на 37 уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,17{,}0 & 37 \\ \cline{2-2}
\underline{148} & 0,4594\ldots \\
-\,220 & \\
\underline{185} & \\
-\,350 & \\
\underline{333} & \\
-\,170 & \\
\underline{148} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Дальше вычисления будут повторяться, так что $5\,\dfrac{17}{37} = 5,(459)$.

Задача 6.1. Запишите в виде бесконечных десятичных дробей числа: $1/7$, $3/14$, $5/11$, $1/17$, $3/13$, $3/250$, $7/625$, $1/15$.

Решая задачу, Вы, должно быть, заметили, что возникающая в результате деления десятичная дробь либо с некоторого места становится периодической, либо конечна. Скажем, $7/30 = 0,2333\ldots = 0,2(3)$, а $1/25 = 0,04$. Впрочем, конечную десятичную дробь также можно рассматривать как бесконечную периодическую: $0,04 = 0,04000\ldots = 0,04(0)$.

Задача 6.2. Докажите, что каждое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Задача 6.3. Какие обыкновенные дроби p/q дают в десятичной записи конечные дроби, а какие — бесконечные?

Поглядим теперь на связь между обыкновенными и десятичными дробями с противоположного конца. Пусть дана бесконечная периодическая десятичная дробь, скажем,

$$0,575757\ldots = 0,(57) \qquad \text{или} \qquad 0,12500\ldots = 0,125(0) = 0,125\,.$$

Можете ли Вы подобрать такую обыкновенную дробь, которая даст ее при переводе в десятичную?

Со вторым примером разобраться легко: $0,125 = 125/1000 = 1/8$. А вот в первом примере подобрать ответ не так-то и просто. В связи с этим возникает вопрос: а любую ли бесконечную периодическую дробь можно превратить в обыкновенную?

Метод Архимеда. Один из способов решения первой задачи восходит к Архимеду. Он состоит в том, что дробь $0,5757\ldots$ нужно обозначить через x и затем составить на x уравнение, из которого его можно было бы найти. Итак, пусть

$$x = 0,575757\ldots\ .$$

Умножив это равенство на $0,01$, получим:

$$0,01\,x = 0,005757\ldots\ .$$

Вычтем теперь второе равенство из первого:

$$x - 0,01\,x = 0,57\ .$$

Таким образом, $x\cdot\left(1-\dfrac{1}{100}\right) = \dfrac{57}{100}$, откуда $x = \dfrac{57}{100} : \dfrac{99}{100} = \dfrac{19}{33}$. Проверим правильность ответа:

$$\begin{array}{r|l}
-\ 19{,}0 & 33 \\
\underline{165} & \overline{0{,}575\ldots} \\
-\ 250 & \\
\underline{231} & \\
-\ 190 & \\
\underline{165} & \\
\ldots &
\end{array}$$

Задача 6.4. Каким рациональным числам соответствуют бесконечные периодические дроби:

а) $0,777\ldots$ б) $0,363636\ldots$ д) $0,3121212\ldots$
в) $0,135135\ldots$ г) $0,714685714685\ldots$ е) $0,9999\ldots$

Задача 6.5. Докажите, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

В качестве следствия мы получаем, в частности, что бесконечная десятичная дробь

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016 89\ldots$$

не является периодической.

Задача 6.6. Приведите еще примеры десятичных дробей, не являющихся рациональными числами. Рационально ли число $0,1\,00\,1\,0000\,1\,000000\,1\,000\ldots$, у которого единицы стоят на 1-м, 4-м, 9-м, 16-м, 25-м, 36-м и т. д. местах, а в остальных местах — нули?

Задача 6.7. Какие числа x «зашифрованы» следующими записями:

а) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ б) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ в) $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots}}}$

Задача 6.8. Найдите:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}}$ б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\cdots}}}}$ в) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\cdots}}}}$

Задача 6.9. Докажите неравенство $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}}_{2000 \text{ радикалов}} < 3$

Задача 6.10. Докажите следующее правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную: $0,a_1\ldots a_n(b_1\ldots b_m) = p/q$, где

$$p = \overline{a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m} - \overline{a_1\ldots a_n}$$
$$q = \underbrace{99\ldots9}_{m}\ \underbrace{00\ldots0}_{n}$$

(запись $\overline{a_1\,a_2\ldots a_n}$, как всегда, обозначает n-значное число с цифрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Например, $0,21516161616\ldots = \dfrac{21516-215}{99000}$.

§ 7 Геометрическая прогрессия

Парадокс Зенона. Зенон Элейский (V в. до Р.Х.), занимаясь весьма сложными вопросами о природе движения, предложил следующее рассуждение, называемое теперь парадоксом Зенона. Представим себе Ахиллеса, который собирается догнать черепаху, находящуюся от него на расстоянии одной стадии (примерно 200 *м*). Предположим, что Ахиллес идет вдвое быстрее черепахи. Пока Ахиллес дойдет до первоначального положения черепахи, она уползет от него на половину стадии. Пока Ахиллес будет идти эти пол стадии, черепаха уползет еще на четверть стадии. Затем Ахиллесу останется до черепахи 1/8 стадии, на которые она уползет, пока он будет идти эту четверть, потом 1/16, 1/32 и так далее. В результате весь путь Ахиллеса до момента, когда он нагонит черепаху, оказывается разбитым на бесконечное число последовательных участков, каждый из которых вдвое короче предыдущего, и возникает знаменитый парадокс Зенона: с одной стороны, Ахиллес догонит черепаху, ибо идет быстрее, с другой — он без конца отстает от нее на длину очередного участка.

Рассмотрим внимательно парадокс Зенона. Как и большинство подобных рассуждений, он похож на фокус. Демонстрируя фокус, иллюзионист обычно отвлекает внимание публики от причин происходящего. Так и Зенон — в своем рассуждении он все время говорит о расстоянии, отвлекая наше внимание от такой величины, как время. Между тем, время, за которое Ахиллес догонит черепаху, посчитать совсем не сложно — в наши дни подобные задачи «проходят» в пятом классе и формулируют примерно так:

Задача 7.1. Из пунктов A и $Б$, расположенных на расстоянии 1 *км* друг от друга, одновременно и в одном и том же направлении вышли два пешехода со скоростями v_1*км/ч* и v_2*км/ч*, причем $v_1 > v_2$ (см. рис. 7.1). Через какое время они встретятся и сколько пройдет каждый из них до момента встречи?

Задача 7.2. Пусть Ахиллес (первый пешеход) идет со скоростью v стадий в час, а черепаха вдвое медленнее. Выясните:

а) за какое время Ахиллес догонит черепаху;

б) за какое время Ахиллес и черепаха пройдут свои первые отрезки;

в) за какое время Ахиллес и черепаха пройдут свои n-ые отрезки;

г) какой суммой выражается время, за которое Ахиллес пройдет свои первые n отрезков;

д) как выглядит соответствующая бесконечная сумма;

е) равна ли эта сумма числу, полученному методом зад. 7.1 ?

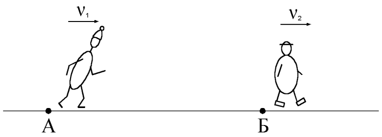


Рис. 7.1. Два пешехода.

Задача 7.3. Запишите общий путь, пройденный Ахиллесом, в виде бесконечной суммы и вычислите эту сумму[1], найдя путь обычным способом — как в зад. 7.1.

Задача 7.4. При помощи зад. 7.1 решите зад. 7.2 и зад. 7.3 в предположении, что

а) Ахиллес идет в 10 раз быстрее черепахи;

б) отношение скорости черепахи к скорости Ахиллеса равно q (где, разумеется, $0 < q < 1$).

Какие суммы Вы при этом вычислили?

Задача о делении пирога. На свои именины Алеша угощал своих шестерых гостей пирогом. Сначала пирог был разрезан на 7 равных частей и разложен по тарелкам. Гости свои куски съели, а Алеша разделил свою часть пирога на 7 равных частей и роздал их гостям. Те снова съели свои порции, а Алеша опять разделил свою долю на 7 равных частей и т. д. Понятно, что через некоторое время от пирога осталось лишь несколько крошек, прилипших к ножу и тарелкам.

Задача 7.5. Какая часть пирога осталась у Алеши, а какие досталась гостям после первого, второго, и n-ого разрезания? Запишите в виде бесконечной суммы ту часть пирога, что съели гости (а съели-то они весь пирог!). Чему равна написанная Вами сумма?

Задача 7.6. Запишите в виде суммы ту часть пирога, которая оказалась съеденной после n-го разрезания. Чему равна эта сумма?

В истории с делением пирога, как и в парадоксе Зенона, возникают последовательности чисел, в которых каждое очередное число в одно и то же фиксированное число раз меньше предыдущего. Такие последовательность называется *геометрическими прогрессиями*.

Определение. *Последовательность, каждый следующий член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же число $q \neq 0, 1$, называется геометрической прогрессией, а это число q называется знаменателем геометрической прогрессии.*

[1]не встречались ли Вы уже с этой задачей в § 5 ?

Таким образом, в геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_k$ со знаменателем q мы имеем $q = b_2/b_1 = b_3/b_2 = \cdots = b_k/b_{k-1} \neq 0, 1$.

Например, бесконечная последовательность: 1, 2, 4, 8, 16, ... — это (бесконечная) геометрическая прогрессия со знаменателем 2, а конечная последовательность: 27, 9, 3, 1, 1/3, 1/9, 1/27 — это (конечная) геометрическая прогрессия со знаменателем 1/3. Набор из двух чисел, скажем, $\{7, 11\}$ тоже можно рассматривать как (совсем коротенькую) геометрическую прогрессию со знаменателем 11/7. Еще один пример геометрической прогрессии доставляет последовательность 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... Каков тут знаменатель?

Задача 7.7. Какие геометрические прогрессии Вы просуммировали в зад. 7.1 и зад. 7.5 ?

Задача 7.8. Вычислите суммы (ответ обоснуйте):

а) $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{k-1}{k^2} + \cdots + \dfrac{k-1}{k^n} + \cdots$.

б) $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{k-1}{k^2} + \cdots + \dfrac{k-1}{k^n}$

Еще раз о методе Архимеда. Вернемся теперь ненадолго к бесконечным десятичным дробям (см. § 6) и вспомним, как мы из бесконечной периодической десятичной дроби получали обыкновенную:

$$\begin{array}{r} x = 0,575757\ldots \\ -\;0,01\,x = 0,005757\ldots \\ \hline 0,99\,x = 0,57 \quad\Longrightarrow\quad x = 57/99 \end{array}$$

Оказывается, и здесь спрятана геометрическая прогрессия!

Задача 7.9. Убедитесь, что последовательности 0,1, 0,01, 0,001, ... и 0,57, 0,0057, 0,000057, ... являются (бесконечными) геометрическими прогрессиями. Какие у них знаменатели? Чему равны их суммы? Выразите эти суммы десятичными и обыкновенными дробями.

Эта задача позволяет смотреть на метод Архимеда как на еще один способ вычисления суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\begin{array}{rcl} S &=& \dfrac{57}{100} + \dfrac{57}{100^2} + \dfrac{57}{100^3} + \cdots \\ -\;\dfrac{1}{100}S &=& \qquad\;\; \dfrac{57}{100^2} + \dfrac{57}{100^3} + \cdots \\ \hline \dfrac{99}{100}S &=& \dfrac{57}{100} \end{array} \qquad\Longrightarrow\qquad S = \frac{57}{99}$$

Задача 7.10. Вычислите методом Архимеда суммы

а) бесконечную: $\dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{27} + \cdots$;   б) конечную: $\dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{9} + \cdots + \dfrac{5}{3^n}$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Теперь все готово к тому, чтобы написать общую формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Задача 7.11. Пусть a_0, a_1, a_2 ... — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q. Докажите, что ее сумма равна

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \frac{a_0}{1-q}$$

Заметим, что мы обсудили уже целых три подхода к суммированию бесконечных геометрических прогрессий — это зад. 7.3 (движение), зад. 7.5 (деление пирога) и зад. 7.10 (а) (Архимедов метод составления уравнения). Попробуйте доказать предыдущую формулу каждым из этих трех методов.

Задача 7.12. Получите ответ в зад. 7.3, зад. 7.2, зад. 7.5, зад. 7.9, зад. 7.10 (а), пользуясь формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Задача 7.13. Воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии запишите обыкновенными дробями числа:

$0,575757\ldots,\qquad 0,36363636\ldots,\qquad 0,714714\ldots,\qquad 0,3121212\ldots.$

В какую обыкновенную дробь превратит эта формула число $0,a_1\,\ldots\,a_n\,(b_1\,\ldots\,b_m)$?

Предостережение. В этом параграфе мы не раз вычисляли сумму бесконечного числа слагаемых, не задаваясь вопросом правомерности таких действий. Основанием для нас, конечно, служила геометрическая или физическая ясность происходящего, ведь суммы каждый раз имели вполне конкретный «материальный» смысл. Следует, однако, иметь в виду, что осмысленно говорить о сумме бесконечного числа слагаемых можно далеко не всегда. Например, сразу ясно, что не стоит и пытаться вычислить значение бесконечной суммы

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots$$

поскольку с увеличением числа слагаемых она неограниченно растет. Гораздо хуже дело обстоит с суммой $S=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ (бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем -1). На первый взгляд, естественно считать, что

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$$

Однако, скобки можно было бы расставить и по-другому, скажем, так:

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=$$
$$=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)=1-0-0-0-\cdots=1$$

К еще более удручающему результату приводит метод составления уравнения:

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S$$

откуда $S=1-S$, а значит, $2\,S=1$ и $S=1/2$. Единственный разумный вывод из сказанного — сумма $1-1+1-1+\cdots$ не имеет *никакого* числового значения[1]. Не подвергает ли это сомнению и наши предшествующие результаты? К счастью, можно доказать (мы этого делать не будем), что вычисление суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q корректно в случае $|q|<1$, к которому как раз и относятся все предыдущие (и последующие в дальнейшем) примеры.

[1]Справедливости ради отметим, однако, что иногда, особенно в физике, специфика конкретной задачи, где возникает такого рода сумма, предписывает и конкретное число, которое естественно считать её численным значением; при этом в одном физическом контексте может оказаться разумным считать, что $1-1+1-1+\cdots=0$, а в другом, — что $1-1+1-1+\cdots=1/2$.

§ 8 Ещё о суммировании геометрических прогрессий

Задача 8.1. Суммами каких геометрических прогрессий являются числа
а) $\underbrace{77\ldots7}_{2000\text{ раз}}$ б) $0,\underbrace{1313\ldots13}_{2000\text{ раз}}$ в) $0,131313\ldots$?

Задача 8.2. Приведите пример бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой
а) в два, б) в три раза больше её первого члена;
в) в три, г) в два раза меньше её первого члена.

Задача 8.3. Пусть $a_1, a_2 \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Понятно, что $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$. Выразите a_n через a_1 и n (т. е. напишите «формулу общего члена»).

Задача 8.4. (Сумма конечной геометрической прогрессии) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечная геометрическая прогрессия из n элементов со знаменателем q, где q *любое* число не равное нулю или единице. Докажите, что ее сумма

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Интересно, кого Вы, решая эту задачу, выбрали себе в помощники — Архимеда, Ахиллеса или праздничный пирог? Между тем имеется еще одна точка зрения на формулу для суммы геометрической прогрессии. Для начала вспомним известные формулы для разности квадратов и разности кубов:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

и попробуем продолжить в эти ряды дальше вниз (заполните пропуски):

$$x^4 - y^4 = (x-y)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots) \qquad x^4 - 1 = (x-1)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots)$$
$$x^5 - y^5 = (x-y)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots) \qquad x^5 - 1 = (x-1)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots)$$

Задача 8.5. Что по Вашему нужно поставить вместо многоточий в формулах

$$x^n - y^n = (x-y)(\quad \ldots \quad) \quad \text{и} \quad x^n - 1 = (x-1)(\quad \ldots \quad)$$

Докажите высказанные Вами гипотезы (например, раскрыв скобки) и выведите из этих формул формулы для суммирования конечных геометрических прогрессий.

Итак, на формулу для суммы геометрической прогрессии можно смотреть как на обобщение формулы для разности кубов.

Задача 8.6. Что Вы можете сказать по поводу $x^n + y^n$ (хотя бы для некоторых n) ?

Средние геометрические. Название «геометрическая прогрессия» связано с таким ее замечательным свойством: каждый член геометрической прогрессии за исключением крайних[1] является, с точностью до знака, средним геометрическим своих соседей. Напомним, что положительное число a называется *средним геометрическим* (или *средним пропорциональным*) двух положительных чисел b и c, если $a = \sqrt{bc}$ (см. рис. 8.1), что иначе можно записать как $a^2 = bc$, или как $c/a = a/b$.

[1] т. е. первого, а если прогрессия конечная, — то и последнего

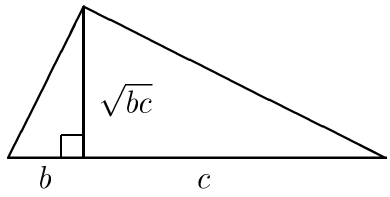


Рис. 8.1. Среднее геометрическое.

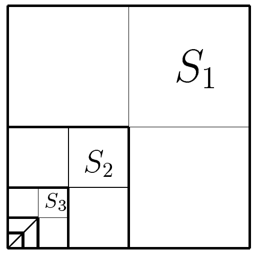


Рис. 8.2. Деление квадрата на 4 части.

Задача 8.7. Докажите, в геометрической прогрессии, составленной из положительных чисел, каждый член, кроме крайних, равен среднему геометрическому своих соседей.

Задача 8.8. Докажите и обратное утверждение: последовательность, у которой каждый член равен среднему геометрическому своих соседей, является геометрической прогрессией.

Задача 8.9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия (составленная, например, из целых чисел). Покажите, что для любого числа $q \neq 0, 1$ последовательность q^{a_1}, q^{a_2}, …, q^{a_n} является геометрической прогрессией.

Какое свойство последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обеспечивает для геометрической прогрессии q^{a_1}, q^{a_2}, …, q^{a_n} выполнение утверждения из зад. 8.7?

Задача 8.10. Вычислите сумму $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots111}_{2000 \text{ единиц}}$.

Задача 8.11. Рассмотрим квадрат с площадью S. Разобьем его на 4 одинаковых квадрата и рассмотрим уголок, составленный из трех таких квадратов. Четвертый квадрат снова разобьем на 4 одинаковых квадрата, из трех из них составим уголок, а с четвертым проделаем ту же операцию и так далее (см. рис. 8.2), пока весь квадрат не окажется разбит на уголки одинаковой формы, но разного размера.

а) Докажите, что площади этих уголков S_1, S_2, S_3 … составляют геометрическую прогрессию. Найдите S_n.

б) Выпишите явно и вычислите конечную сумму $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ и бесконечную сумму $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$.

Задача 8.12*. Решите предыдущую задачу для случая, когда каждый раз квадрат делится на m^2 равных квадратов, а уголок берется шириной в $m - 1$ квадрат (для $m = 3$ это нарисовано на рис. 8.3).

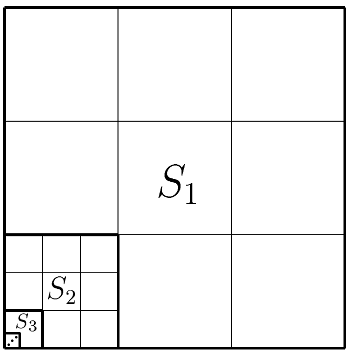


Рис. 8.3. Толстые уголков.

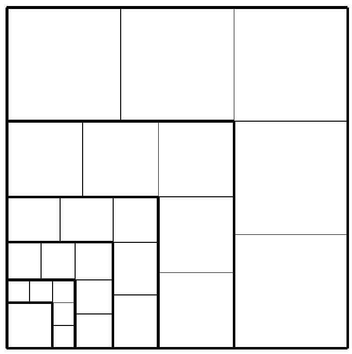


Рис. 8.4. Тонкие уголков.

Задача 8.13*. Решите предыдущую задачу для случая, когда уголок берется шириной в 1 квадрат (см. рис. 8.4 для $m = 3$)

Задача 8.14. В кубке по футболу участвует 256 команд. Кубок разыгрывается по олимпийской системе — проигрывающий выбывает. Сколько нужно провести матчей, чтобы определить обладателя кубка?

Задача 8.15. Торговец принес на рынок мешок орехов. Первый покупатель купил один орех, второй — два ореха, третий — четыре, четвертый — восемь и т. д.: каждый следующий покупатель покупал вдове больше орехов, чем предыдущий. Последний купил 50 кг, после чего у продавца остался один орех. Сколько килограммов орехов было у продавца в начале?

Задача 8.16. На овощебазу завезли тонну картофеля. Директору базы разрешено за 1 раз направить в магазин не более десятой части от имеющегося на данный момент на овощебазе картофеля. Удастся ли ему реализовать хотя бы половину поступившего картофеля? А 900 кг? А 999 кг?

Задача 8.17. (Проблема раздела наследства)

а) Старший из двух братьев получил наследство и отдал младшему брату половину полученной им суммы. Тот, из уважения к старшинству, возвратил половину полученной суммы старшему брату, старший же снова вернул половину младшему брату и так далее. В каком отношении в конце концов будет разделено наследство между братьями?

б) Как будет разделено наследство, если каждый брат возвращает другому не половину а одну n-тую часть полученной перед этим доли?

в) Какую часть должен возвращать каждый, чтобы в результате один бы получил 51%, а другой — 49%?

г) Какую часть должен возвращать каждый, чтобы в результате они поделились бы поровну?

Задача 8.18*. Имеется n гирь. Можно ли из них набрать две равные по весу кучи, если веса гирь суть

а) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ граммов? б) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n$ граммов?

Задача 8.19. Сережа возвращается из леса домой по дороге, длина которой 10 км. Как только Сережа вышел на дорогу, его верный пес Бим пустился бежать к дому, а добежав до дома, немедленно повернул и побежал обратно к Сереже; добежав до Сережи, вновь побежал к дому и т.д. до тех пор, пока Сережа не пришел домой. Скорости Сережи и Бима были все время постоянны по величине и равны соответственно 5 км/ч и 15 км/ч. Найдите, сколько километров пробежал Бим:

а) всего; б) по направлению к дому; в) по направлению от дома.

§ 9 Другие приёмы суммирования

Как Вы могли заметить, все нити предыдущего изложения были привязаны к суммированию арифметической и геометрической прогрессий. Глядя на эти суммы с разных точек зрения, мы нашли несколько способов для их вычисления: в § 2 появились треугольные числа — частный случай арифметической прогрессии; в § 3 разнообразные разрезания позволили вычислять суммы и других арифметических прогрессий; в § 4 сумма арифметической прогрессии была (двумя способами) вычислена при помощи подходящего группирования слагаемых. Для вывода формулы суммирования геометрической прогрессии также было предложено четыре способа: два были связаны с Ахиллесом и Архимедом, третий — с разрезанием пирога, и еще один возник из формул типа разности кубов.

В этом параграфе мы познакомим Вас с еще несколькими приемами суммирования, не связанными напрямую с суммированием прогрессий. Мы начнем с того, что вспомним зад. 5.2, где надо было вычислить сумму

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Выполняя в свое время школьные упражнения по сложению и вычитанию правильных дробей, Вы могли заметить, что дроби типа 1/6, 1/12 или 1/20 возникают из более простых:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\quad,\qquad \frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad,\qquad \frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

Это относится ко всем членам суммы, поскольку

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

для любого k (обязательно проверьте это!). Таким образом,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}= \\ =\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Если теперь раскрыть скобки, то все слагаемые, кроме двух крайних, сократятся и мы получим

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Суммирование разностей. Показанный только что прием называется *суммированием разностей.* Он состоит в том, что каждое слагаемое суммы представляется в виде разности двух чисел так, чтобы после раскрытия скобок все «промежуточные» члены сократились и остались лишь два крайних слагаемых.

Задача 9.1. Вычислите $1+3+\cdots+(2n+1)$ суммированием разностей. Какая картинка на клетчатой бумаге соответствует Вашему вычислению?

Задача 9.2. Найдите $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$ и $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$. Чему равна бесконечная сумма $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots$?

Задача 9.3. Вычислите суммы:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100\cdot 101}$

в) $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия.

Решая эти задачи, Вы, видимо, догадались, как можно обобщить метод суммирования разностей — каждый член исходной суммы надо постараться представить в виде суммы или разности нескольких слагаемых так, чтобы после раскрытия скобок бóльшая их часть сокращалась между собой или легко складывалась. При этом каждый член исходной суммы может расщепиться и на два, и на три, и на четыре слагаемых. Более того, количество промежуточных слагаемых может быть своим для каждого члена суммы. Поясним эту мысль решением следующей задачи.

Задача 9.4. Чему равна сумма $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n$?

Запишем каждое слагаемое в виде $k\cdot 2^k=\underbrace{2^k+2^k+\cdots+2^k}_{k\ \text{штук}}$. Тогда исходная сумма представится треугольной таблицей:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & \multicolumn{13}{l}{1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \cdots\ +(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n=} \\
= & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\
 & & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\
 & & & & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\
 & & & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & & & & & & & & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\
 & & & & & & & & & & + & 2^n &
\end{array}$$

Ее строки суть геометрические прогрессии со знаменателем 2. Поэтому сумма чисел в первой строке равна $2+2^2+\cdots+2^n=2\cdot\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^{n+1}-2$, во второй строке — $2+2^3+\cdots+2^n=2^2\cdot\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n+1}-2^2$, в третьей — $2^{n+1}-2^3$, и т. д. В последней строке стоит 2^n, которое мы для единообразия тоже представим как $2^{n+1}-2^n$. Таким образом, вся сумма будет равна

$$(2^{n+1}-2)+(2^{n+1}-4)+\cdots+(2^{n+1}-2^n)=$$
$$=\Big(\underbrace{2^{n+1}+2^{n+1}+\cdots+2^{n+1}}_{n\ \text{раз}}\Big)-\Big(2+4+\cdots+2^n\Big)=n\cdot 2^{n+1}-2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=$$
$$=n\cdot 2^{n+1}-(2^{n+1}-2)=2+2^{n+1}(n-1).$$

Теперь давайте разберемся в том, что мы сделали.

Метод двойного суммирования. Решая предыдущую задачу, мы представили исходную сумму в виде суммы *таблицы* чисел, которую можно складывать в двух направлениях — по строкам и по столбцам. Такие суммы называются *двойными суммами*. Коротко наше преобразование можно записать[1] так:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = \sum_{k=1}^{n}\Bigl(\underbrace{2^k+2^k+\cdots+2^k}_{k\ \text{раз}}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k$$

Затем, вместо того, чтобы суммировать таблицу по столбцам (именно такое суммирование дает наши исходные слагаемые $k\cdot 2^k$), мы просуммировали ее по строкам, где стоят геометрические прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right) = n\,2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i = (n-1)\,2^{n+1}+2$$

Преобразование обычной суммы в двойную с последующим изменением порядка суммирования мы будем называть *методом двойного суммирования*. Как мы уже упоминали выше, этот метод работает, если каждый член суммы, в свою очередь, представляется как некоторая сумма.

Задача 9.5. Выведите общую формулу для $1\cdot q+2\cdot q^2+3\cdot q^3+4\cdot q^4+\cdots+n\cdot q^n$.

Задача 9.6. Вычислите (если Вы ее до сих пор этого не сделали) сумму

$$1+11+111+1111+\cdots+\underbrace{111\ldots1}_{n}\ .$$

Задача 9.7. Найдите суммы

а) $n\cdot x+(n-1)\cdot x^2+(n-2)\cdot x^3+\cdots+2\cdot x^{n-1}+1\cdot x^n$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\cdot x^k$;

в) $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{8}+\dfrac{17}{16}+\cdots$ (всего n слагаемых).

Суммирование степеней. Посмотрим теперь на суммирование разностей, отправляясь от заранее предписанного результата вычислений. Пусть, например, итоговая сумма представилась в виде:

$$\left(1^2-0^2\right)+\left(2^2-1^2\right)+\left(3^2-2^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\cdots+\left((n+1)^2-n^2\right) = \\ = (n+1)^2-0^2=(n+1)^2\ .$$

Какую исходную сумму мы могли бы таким образом вычислять? Общий член этой суммы должен быть равен $a_k=(k+1)^2-k^2=2k+1$. Значит, суммируя разности квадратов последовательных чисел, мы вычисляем сумму первых n нечетных чисел:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2\ .$$

Это позволяет сосчитать и сумму $1+2+\cdots+n$ всех первых n чисел. Действительно, из

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= 1+3+5+\cdots+(2n+1) = \\ &= (2\cdot0+1)+(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\cdots+(2\cdot n+1) = \\ &= 2\cdot(0+1+2+\cdots+n)+\Bigl(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(n+1)\ \text{раз}}\Bigr) = \\ &= 2\,(1+2+\cdots+n)+n\ ,\end{aligned}$$

[1]подробнее о специальных сокращенных обозначениях для сумм см. приложение в конце этой книги

вытекает, что $2\,(1+2+\,\cdots\,+n)+n+1=(n+1)^2$, откуда

$$1+2+\,\cdots\,+n=\frac{1}{2}\,\big((n+1)^2-(n+1)\big)=\frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

Более выразительно это вычисление можно представить в виде:

$$\begin{array}{lr}
 & (n+1)^2-n^2=(2\,n+1)\cdot 1=2\,n+1\\
+ & n^2-(n-1)^2=(2\,n-1)\cdot 1=2\,n-1\\
+ & (n-1)^2-(n-2)^2=(2\,n-3)\cdot 1=2\,n-3\\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+ & 3^2-2^2=\ (3+2)\cdot 1\ =2\cdot 2+1\\
+ & 2^2-1^2=\ (2+1)\cdot 1\ =2\cdot 1+1\\
+ & 1^2-0^2=\ (1+0)\cdot 1\ =2\cdot 0+1\\
\hline
 & (n+1)^2=(2n+1)+(2n-1)+(2n-3)+\,\cdots\,+5+3+1
\end{array}$$

Задача 9.8. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей кубов пар последовательных натуральных чисел? Используя эту сумму, найдите $1^2+2^2+\,\cdots\,+n^2$.

Задача 9.9. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей $(n+1)^4-n^4$? Найдите с ее помощью сумму кубов первых n натуральных чисел.

Задача 9.10. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей $q^{n+1}-q^n$ и какие суммы можно сосчитать с ее помощью?

Задача 9.11. Придумайте, как, рассуждая в духе предыдущих трех задач, получить формулу для суммирования геометрической прогрессии.

Мы видим, что вычитая последовательные кубы, можно получить формулу для суммы первых n квадратов, а вычитая четвертые степени, можно получить формулу для суммы кубов. Естественно возникает желание продолжить эту процедуру и получить формулы для сумм пятых, шестых и т. д. степеней. Эта завораживающая задача околдовывала многих великих математиков. Так, Якоб Бернулли (1654–1705) в своей книге *Ars Conjectandi* с гордостью писал о том, что он смог «сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа»[1], а в первом номере журнала «Квант» за 1989 г. академик И. М. Гельфанд вспоминал, что в юношеские годы решение этой задачи значительно повлияло на его становление как математика. Итак, обозначим через $S_k(n)$ сумму k-ых степеней первых n натуральных чисел:

$$\begin{aligned}
S_0(n)&=1^0+2^0+\,\cdots\,+n^0=\underbrace{1+1+1+\,\cdots\,+1}_{n}=n\\
S_1(n)&=1^1+2^1+\,\cdots\,+n^1=1+2+\,\cdots\,+n=n\,(n+1)/2\\
S_2(n)&=1^2+2^2+\,\cdots\,+n^2\\
S_3(n)&=1^3+2^3+\,\cdots\,+n^3 \qquad \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Задача 9.12. Выразите $S_2(n)$ через $S_1(n)$ и $S_0(n)$, затем выразите $S_3(n)$ через $S_0(n)$, $S_1(n)$ и $S_2(n)$. Далее, найдите явные формулы для $S_4(n)=1^4+2^4+\,\cdots\,+n^4$ и $S_5(n)=1^5+2^5+\,\cdots\,+n^5$.

[1]См. уже цитированную нами книгу: *К.Айерленд, М.Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел.* М., «Мир», 1987.

Задача 9.13**. Выразите сумму k-ых степеней натуральных чисел через суммы меньших степеней.

Ответ к последней задаче далеко не прост. Тем не менее, об $S_k(n)$ можно сказать кое-что.

Задача 9.14. Докажите, что $S_k(n)$ является многочленом $(k+1)$-ой степени от n и выясните чему у этого многочлена равны

а) коэффициент при старшей степени n;

б) сумма всех коэффициентов.

Задача 9.15**. Подумайте, что бы Вы могли еще сказать о коэффициентах многочленов $S_k(n)$

Аналитические приемы суммирования. Кроме рассмотренных нами способов, существует множество красивых приемов суммирования, использующих дифференциальное и интегральное исчисление, а также другие методы из математического анализа. Например, суммы вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ или $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ можно рассматривать как функции от q. Те, кто умеет дифференцировать и интегрировать, легко сообразят, что функция $S(q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}$ есть не что иное как производная от функции $f(q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$. Поэтому, $S(q) = f'(q) = \left(\dfrac{1}{1-q}\right)' = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Для подсчета же, скажем, суммы $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}\, q^{n+1}$ нужно, наоборот, проинтегрировать функцию $f(q) = \dfrac{1}{1-q}$.

§ 10 Суммирование треугольных и квадратных чисел

В этом параграфе мы попытаемся показать, как работают разные приемы суммирования, описанные в этой книге, на примере вычисления сумм треугольных и квадратных чисел. Прочтя этот заключительный параграф, Вы проверите, хорошо ли Вы освоили предыдущие разделы (а если же Вы только начали читать книгу с этого места, то получите хорошее представление о всем ее содержании).

Начнем с того, что сумма первых n треугольных чисел легко выражается через сумму первых n квадратов и наоборот:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - \frac{n\,(n+1)}{2}$$
$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{n\,(n+1)}{4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2 + \cdots + T_n &= \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \cdots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + n^2 + n\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 + 2 + \cdots + n\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{n\,(n+1)}{4}\,.
\end{aligned}$$

Поэтому, вычисляя одну сумму, мы одновременно вычисляем и другую.

Геометрическое суммирование. Чтобы подсчитать сумму первых n треугольных чисел геометрически (т. е. разрезая и складывая) нам придется вместо квадратиков использовать кубики, и тем самым, рисовать объемные картинки. Первое треугольное число теперь изображается одним кубиком, второе — тремя и т. д., как на рис. 10.1:

???

Рис. 10.1. Трехмерное треугольное число.

Поставив друг на друга такие фигурки из кубиков, мы получим пространственное изображение суммы первых n треугольных чисел в виде ступенчатой треугольной пирамиды[1], как на рис. 10.2 (впрочем, желающие могут обойтись без кубиков и глядеть на рис. 10.3). Поэтому сумма $\Pi_n \stackrel{\text{def}}{=} T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ называется также n-тым *пирамидальным* числом.

??? ???

Рис. 10.2. Рис. 10.3.

В § 3 для вычисления n-того треугольного числа мы складывали из двух ступенчатых треугольников прямоугольник, как было показано на рис. 3.2, который на языке кубиков превращается в трехмерную картинку, изображенную на рис. 10.4:

???

[1] *треугольная пирамида* или *тетраэдр* — это многогранник, имеющий 4 вершины 4 треугольных грани

Рис. 10.4.

Подобным же образом, для вычисления n-го пирамидального числа мы дополним пирамиду, показанную на рис. 10.3, до прямой треугольной призмы или же до прямоугольного параллелепипеда — объемы обоих этих тел легко подсчитать.

Дополнение ступенчатой пирамиды высоты n до ступенчатой призмы высоты $n+1$ показано на рис. 10.5:

???

Рис. 10.5.

Задача 10.1. Найдите объем призмы на рис. 10.5 (т. е. выясните, сколько кубиков уходит на ее постройку).

Поглядим теперь на рис. 10.5 повнимательнее. Ступенчатый треугольник, заполняющий k-тый, считая сверху, этаж исходной пирамиды, выступает из-под предыдущего $(k-1)$-ого этажа ровно k крайними кубиками, идущими по его гипотенузе. Чтобы добраться до верха призмы, на каждый из этих k выступающих кубиков нужно поставить столбик высотой в k кубиков. Таким образом, над выступающей частью k-го сверху этажа пирамиды в призме лежит ровно k^2 кубиков. Складывая по всем этажам, получаем, что объем призмы равен

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 =$$
$$= T_1 + T_2 + \cdots + T_n + 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Теперь остается только воспользоваться результатом из зад. 10.1.

Задача 10.2. Пользуясь зад. 10.1, рис. 10.5 и предыдущими рассуждениями, вычислите суммы $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ и $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

Как мы уже говорили, вместо треугольной призмы можно использовать прямоугольный параллелепипед или куб.

Задача 10.3. Нарисуйте фигуру, остающуюся после вырезания из куба размера $n \times n \times n$ углового кубика размера $(n-1) \times (n-1) \times (n-1)$. Какой у нее объем?

Ответ на первый вопрос задачи нарисован на рис. 10.6, а рядом, на рис. 10.6, показано, как из таких фигурок сложить куб размера $n \times n \times n$.

Задача 10.4. Вычислите суммы треугольных и квадратных чисел, пользуясь рис. 10.6 и рис. 10.6

??? ???

Рис. 10.6. Рис. 10.7.

Двойное суммирование. Найдем теперь сумму первых n треугольных чисел методом двойного суммирования. Поскольку $T_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$, мы можем написать

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + & \cdots & + & T_{n-1} & + & T_n & = \\
= & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \cdots & + & 1 & + & 1 & + \\
 & & + & 2 & + & 2 & + & \cdots & + & 2 & + & 2 & + \\
 & & & & + & 3 & + & \cdots & + & 3 & + & 3 & + \\
 & & & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & & & & & & & & + & (n-1) & + & (n-1) & + \\
 & & & & & & & & & & + & n &
\end{array}$$

Дополним эту треугольную таблицу до квадратной

$$\begin{array}{|ccccccccccccc|}
\hline
 & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \cdots & + & 1 & + & 1 & + \\
+ & 2 & + & 2 & + & 2 & + & \cdots & + & 2 & + & 2 & + \\
+ & 3 & & 3 & + & 3 & + & \cdots & + & 3 & + & 3 & + \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
+ & (n-1) & + & (n-1) & + & (n-1) & + & \cdots & + & (n-1) & + & (n-1) & + \\
+ & n & + & n & + & n & + & n & + & n & + & n & \\
\hline
\end{array}$$

Сумма чисел в каждом столбце квадратной таблицы равна $T_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, и значит, сумма всех чисел в квадратной таблице равна $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$. Подсчитаем теперь, на сколько отличаются суммы чисел в квадратной и треугольной таблицах. Во второй строке мы добавили одну двойку, в третьей — две тройки, т. е. $2 \cdot 3$, в четвертой — три четверки, т. е. $3 \cdot 4$, и т. д. Наконец, к n-той строке прибавилось $n\,(n-1)$. Таким образом, сумма в квадратной таблице больше в точности на сумму *удвоенных* треугольных чисел, т. е. на

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n = 2\,\left(T_1 + \cdots + T_{n-1}\right) .$$

Мы получаем соотношение:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n + 2\,\left(T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1}\right) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

откуда $3\,\left(T_1 + \cdots + T_n\right) - 2T_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$, т. е.

$$3\,\left(T_1 + T_2 + \cdot + T_n\right) = \frac{n^2(n+1)}{2} + n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} ,$$

и значит, $T_1 + T_2 + \cdot + T_n = \dfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)$. Не правда ли, предложенный только что способ двойного суммирования в чем то похож на предыдущее геометрическое решение?

Задача 10.5. Перепишите Ваше геометрическое решение зад. 10.2 на языке двойного суммирования (при этом Вам придется дополнять треугольную таблицу до прямоугольной!).

Задача 10.6. При помощи двойного или тройного суммирования найдите:

а) сумму квадратов $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$;

б) сумму кубов $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$;

в) сумму первых n пирамидальных чисел $\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_n$, где

$$\Pi_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} .$$

Применение теоремы сложения. Еще два способа суммирования треугольных чисел основываются на *теореме сложения* из зад. 2.12, согласно которой

$$T_{n+k} = T_n + T_k + n \cdot k .$$

С одной стороны, мы можем написать

$$\begin{aligned} &T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_{2n-1} + T_{2n} = \\ &\qquad = (T_1 + T_2) + (T_3 + T_4) + \cdots + (T_{2n-1} + T_{2n}) = 2^2 + 4^2 + \cdot + (2n)^2 = \\ &\qquad\qquad = 4\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = 8\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n\,) - 2\,n\,(n+1) . \end{aligned}$$

С другой стороны, по теореме сложения

$$\begin{aligned} &T_{n+1} + T_{n+2} + \cdots + T_{n+n} = \\ &\qquad = (T_n + T_1 + n \cdot 1) + (T_n + T_2 + n \cdot 2) + \cdots + (T_n + T_n + n \cdot n) = \\ &\qquad\qquad = n\,T_n + T_1 + T_2 + \cdots + T_n + n\,(1 + 2 + \cdots + n) = \\ &\qquad\qquad\qquad = 2\,n\,T_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) . \end{aligned}$$

и мы можем написать

$$\begin{aligned} &T_1 + T_2 + \cdots + T_n + T_{n+1} + \cdots + T_{2n} = \\ &\qquad = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) + 2n\,T_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = \\ &\qquad\qquad = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) + 2\,n\,T_n . \end{aligned}$$

Сравнивая два полученных выражения для суммы $T_1 + \cdots + T_{2n}$, мы заключаем, что

$$8\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - 2\,n\,(n+1) = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) + 2\,n\,T_n ,$$

откуда $6\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = 2\,n\,T_n + 2\,n\,(n+1) = n\,(n+1)\,(n+2)$.

Второй способ вычисления пирамидального числа Π_n комбинирует теорему сложения с двойным суммированием:

$$\begin{aligned} &T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \\ &\qquad = (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) = \\ &\qquad = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n = \\ &\qquad = (T_{n+1} - T_1 - T_n) + (T_{n+1} - T_2 - T_{n-1}) + (T_{n+1} - T_3 - T_{n-2}) + \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots + (T_{n+1} - T_{n-2} - T_3) + (T_{n+1} - T_{n-1} - T_2) + (T_{n+1} - T_n - T_1) = \\ &\qquad\qquad\qquad = n\,T_{n+1} - (T_n - T_{n-1} + \cdots + T_1) - (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) , \end{aligned}$$

откуда $3\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = n\,T_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,(n+2)$.

Задача 10.7*. Придумайте аналог теоремы сложения для пирамидальных чисел Π_{m+n}.

Многомерные пирамидальные числа. Числа, с которыми мы имеем дело в этом параграфе — натуральные, треугольные, пирамидальные — строятся по очень похожим правилам:

n-ое натуральное число n представляет собой одномерную пирамиду (отрезок) со стороной длины n и равно $1+1+1+\cdots+1=\dfrac{n}{1}$;

n-ое треугольное число T_n представляет собой двумерную пирамиду (треугольник) со стороной длины n и равно $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}$;

n-ое пирамидальное число Π_n представляет собой трехмерную пирамиду (тетраэдр) со стороной длины n и равно $T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

n-ое …-льное число … представляет собой четырехмерную пирамиду (четырехмерный симплекс) со стороной длины n и равно $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\cdots+\Pi_n=\ldots$.

. . . .

Задача 10.8*. Заполните пропуски в последнем абзаце предыдущего перечня и докажите предложенную Вами при этом формулу для n-того четырехмерно-пирамидального числа $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\cdots+\Pi_n$. Попытайтесь продолжить перечень дальше.

Задача 10.9*. Попытайтесь придумать теоремы сложения для четырехмерных, пятимерных и прочих многомерных пирамидальных чисел.

В настоящий момент мы уже начинаем выходить за естественные рамки этой книги о числах и суммах. Дело в том, что многомерными пирамидальными числами удобнее всего заниматься в рамках другой математической дисциплины — *комбинаторики*, которую, конечно же, стоит изучить обстоятельно, посвятив этому отдельное время (авторы рассчитывают в скором будущем написать по комбинаторике книжку вроде этой). Здесь же мы ограничимся тем, что лишь немного приоткроем дверь в ее удивительный мир и обсудим только одну (из очень многих) комбинаторных интерпретаций пирамидальных чисел.

Суммирование по треугольнику Паскаля. В § 5 мы видели, что ряд единиц, натуральный ряд и ряд треугольных чисел присутствуют на треугольнике Паскаля (см.зад. 5.11 и зад. 5.10):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&& \\
&&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&& \\
&&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&& \\
&&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&& \\
&1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1& \\
\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots
\end{array}$$

Рис. 10.8. Треугольник Паскаля.

Задача 10.10. Найдите в треугольнике Паскаля ряды пирамидальных и четырехмерных пирамидальных чисел.

Напомним, что строки треугольника Паскаля нумеруются сверху вниз, начиная с нулевого номера, а числа каждой строки — слева направо, также начиная с нулевого номера. Число, стоящее под k-тым номером на n-том этаже, обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка») и называется *числом сочетаний из n по k*. Как мы видели в зад. 5.10, числа заполняют треугольник по такому правилу: вдоль боковых сторон стоят единицы, и каждое число внутри треугольника равно сумме двух стоящих над ним чисел из предыдущей строки, т. е.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{10-1}$$

Это правило позволяет сравнительно быстро заполнить любое наперед заданное число строк.

Задача 10.11. Дайте определение n-того k-мерного пирамидального числа. Какому числу сочетаний оно равно?

Задача 10.12. Какому числу сочетаний равны суммы:

а) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m}^m$;

б) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots$ (кстати, сколько тут слагаемых ?).

Чтобы получить общую формулу для числа сочетаний, явно выражающую C_n^k через n и k, можно воспользоваться зад. 5.9, где это число интерпретируется как количество всевозможных маршрутов, которыми шарик может упасть в k-тую комнату n-того этажа лабиринта на рис. 5.1. Каждый такой маршрут, в свою очередь, можно описать, сказав куда — направо или налево — повернул шарик сначала на нулевом этаже, потом на первом этаже, потом на втором и т. д. вплоть до $(n-1)$-го этажа. Если обозначать поворот направо буквой `п`, а поворот налево — буквой `л`, то последовательность поворотов запишется словом, составленным из букв `л` и `п`. Всего это слово будет состоять из n букв, а так как шарик оказывается в результате в комнате № k, т. е. должен будет сделать ровно k правых поворотов[1].

Таким образом, искомое число маршрутов равно количеству всевозможных n-буквенных слов, составленных из k букв `п` и $(n-k)$ букв `л`, или иначе, количеству слов, которые можно получить переставляя буквы в слове

$$\underbrace{\texttt{пп}\ldots\texttt{п}}_{k}\underbrace{\texttt{лл}\ldots\texttt{л}}_{n-k}$$

Чтобы подсчитать это количество, мы сначала выясним, сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове, не содержащем повторяющихся букв.

Задача 10.13. Сколько слов (не обязательно осмысленных !) можно получить переставляя буквы в словах:

а) `ок, рок, урок, турок`;

б) в произвольном k-буквенном слове без повторяющихся букв ?

Если в слове есть повторяющиеся буквы, как, скажем, в слове `топор`, то мы сначала сделаем их разными, снабдив две буквы `о` индексами, т. е. занумеровав их. Переставляя буквы в слове $\texttt{то}_1\texttt{по}_2\texttt{р}$, мы можем получить $5! = 120$ разных слов. Если мы теперь сотрем индексы, делающие две буквы `о` различными, то некоторые разные слова будут превращаться в одинаковые. Например, $\texttt{ро}_1\texttt{по}_2\texttt{т}$ и $\texttt{ро}_2\texttt{по}_1\texttt{т}$ превратятся в одно и то же слово `ропот`. Точно так же и в любое другое слово с ненумерованными буквами превратятся при стирании нумеров ровно два слова с нумерованными буквами, ибо занумеровать две буквы `оо` в каждом слове можно ровно двумя способами. Поэтому, переставляя буквы в слове `топор`, мы получаем $5!/2 = 60$ разных слов.

[1] мы понимаем «лево» и «право» с позиции внешнего наблюдателя, так что, например, слову, состоящему из одних букв `л` отвечает движение вдоль левой границы лабиринта

Задача 10.14. Сколько слов (не обязательно осмысленных!) можно получить переставляя буквы в словах:

а) `кок, курок, молоко, колобок;`

б) $\underbrace{\mathtt{a_1 a_1 \ldots a_1}}_{m_1}\underbrace{\mathtt{a_2 a_2 \ldots a_2}}_{m_2} \ldots \underbrace{\mathtt{a_k a_k \ldots a_k}}_{m_k}$;

в) $\underbrace{\mathtt{аа \ldots а}}_{k}\underbrace{\mathtt{бб \ldots б}}_{m}$?

Итак, если вы решили предыдущую задачу, то поняли, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-k+1)}{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,1}\,,$$

в частности, для одно-, дву-, трех- и четырехмерных пирамидальных чисел мы получаем формулы:

$$\Pi_n^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{1+1+\,\cdots\,+1}^{n}\,n = C_n^1$$

$$\Pi_n^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(1)} T_n = \frac{n\,(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$$

$$\Pi_n^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(2)} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6} = C_{n+2}^3$$

$$\Pi_n^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(3)} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24} = C_{n+2}^3$$

В заключение приведем еще несколько задач, связывающих сочетания со степенями и суммами степеней. При их решении Вам понадобится формула из зад. 5.12 и зад. 5.13 для раскрытии скобок в выражениях $(1+x)^m$ и $(a+b)^m$.

Задача 10.15. Вычислите $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \,\cdots\, + C_n^n$; и $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \,\cdots\, + (-1)^n C_n^n$.

Задача 10.16*. Вычислите суммы:

а) $C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \,\cdots$

б) $C_n^1 + 2\,C_n^2 + \,\cdots\, + n\,C_n^n$

в) $C_n^0 + 2\,C_n^1 + \,\cdots\, + (n+1)\,C_n^n$

г) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \,\cdots\, + \left(C_n^n\right)^2$

Задача 10.17. Выразите n-тое пирамидальное число через сумму квадратов и кубов первых n натуральных чисел[1] и при помощи этого выражения вычислите сумму $1^3 + 2^3 + \,\cdots\, + n^3$.

Задача 10.18. Выразив C_n^4 через суммы степеней, вычислите $1^4 + 2^4 + \,\cdots\, + n^4$.

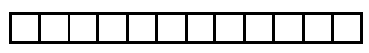
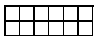
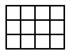
[1] Большой интерес, как легко понять, вызывает обратная задача: выразить сумму k-тых степеней через биномиальные коэффициенты. Ее впервые исследовал Якоб Бернулли. Коэффициенты, участвующие в выражениях сумм степеней через C_n^k называются в его честь *числами Бернулли*.

Ответы, решения, подсказки

В этом последнем разделе приводятся ответы и указания к некоторым (далеко не всем) задачам. Не спешите заглядывать сюда — попытайтесь решить задачу сами! Даже если у Вас никак не получается одолеть ту или иную задачу, лучше отложите ее штурм на какое-то время, почитайте другие разделы этой книжки, а потом вновь вернитесь к размышлениям над ней — часто трудная задача неожиданно решается «сама собой» после такого перерыва.

… к задачам из § 1

… к задачам из § 2

2.2: всего 12-клеточных прямоугольников три:  ,  ,  .

2.3: $n = 36$.

2.4: $5^2 = 3^2 + 4^2$, $10^2 = 6^2 + 8^2$ и $13^2 = 12^2 + 5^2$.

… к задачам из § 3

… к задачам из § 4

… к задачам из § 5

5.9: ответ представлен на рис. 10.8

… к задачам из § 6

… к задачам из § 7

7.1: расстояние между пешеходами уменьшается со скоростью $v_1 - v_2$ *км/ч*; поэтому они встретятся через $\dfrac{1}{v_1 - v_2}$ часов, и за это время первый пешеход пройдет $\dfrac{1}{1 - (v_2/v_1)}$ *км*, а второй $\dfrac{1}{(v_1/v_2) - 1}$ *км*.

… к задачам из § 8

… к задачам из § 9

9.3: пункт (а) есть частный случай пункта (в); в (в) же надо написать:

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

где d — разность прогрессии. Подставляя это в сумму и вынося d за скобку, получим ответ:

$$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}\ .$$

В пункте (б) надо представить каждое слагаемое в виде:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)\ .$$

После всех сокращений останется $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{101}$.

… к задачам из § 10