Дробно линейные преобразования $\mathbb{CP}_1$

M$50\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$. Рассмотрим $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и аффинную карту $\{x_1 = 1\}$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$. Убедитесь, что отображение $\varphi : t \longmapsto (at+c)/(bt+d)$ тогда и только тогда определяет взаимно однозначное отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, когда $ad \neq bc$; а также: **а)** найдите образы и прообразы точек 0, 1 и ∞;

б) явно вычислите[1] обратное преобразование φ^{-1} и композицию $\varphi_2 \circ \varphi_1$ преобразований $\varphi_1 : t \longmapsto (a_1t + c_1)/(b_1t + d_1)$ и $\varphi_2 : t \longmapsto (a_2t + c_2)/(b_2t + d_2)$;

в) докажите, что две матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad \neq bc$ тогда и только тогда определяют одинаковые преобразования $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{t \mapsto (at+c)/(bt+d)} \mathbb{P}_1$, когда они пропорциональны.

M$50\frac{1}{2}\diamond 2$. Сколько неподвижных точек может быть у нетождественного дробно линейного преобразования $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$?

M$50\frac{1}{2}\diamond 3$. Пусть p_1, p_2, p_3 суть три попарно разных точки на $\mathbb{P}_1$, и q_1, q_2, q_3 ещё три попарно разных точки на $\mathbb{P}_1$. Докажите, что существует единственное дробно линейное преобразование $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, переводящее p_i в q_i при всех $i = 1, 2, 3$. Напишите явную формулу для преобразования, переводящего заданные конечные a, b, c соответственно в $0, 1, \infty$.

M$50\frac{1}{2}\diamond 4$. Напишите явную формулу, по которой преобразуется координата x при проектировании x-оси на окружность $x^2 + y^2 = 1$ из точки $(0, 1)$, а затем обратном проектировании окружности на x-ось из точки $(0, -1)$.

M$50\frac{1}{2}\diamond 5$. Рассмотрим прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$, неособую конику $Q \subset \mathbb{P}_2$ и точку $p \in Q$. Проекция $Q \xrightarrow{\pi_p} \ell$ переводит $q \in Q$, $q \neq p$ в точку пересечения прямой pq с ℓ, а точку p в точку пересечения прямой ℓ с касательной к Q в точке p. Докажите, что π_p взаимно однозначна и что однородные координаты точек q и $\pi_p(q)$ выражаются друг через друга в виде рациональных алгебраических функций[2].

M$50\frac{1}{2}\diamond 6$ (автоморфизмы $\mathbb{CP}_1$). Предположим, что некое взаимно однозначное отображение

$$\mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество точек}\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество точек}\}$$

корректно определяется правилом $\varphi : (x_0 : x_1) \longmapsto \left(\dfrac{p_0(x_0, x_1)}{q_0(x_0, x_1)} : \dfrac{p_0(x_0, x_1)}{q_0(x_0, x_1)} \right)$, где p_i и q_i суть *многочлены* от (x_0, x_1). Докажите, что увеличивая, если надо, конечные множества точек неопределённости, но не изменяя отображения на остальных точках, можно считать что:

а) $q_0 \equiv q_1 \equiv 1$, а p_0, p_1 однородны, имеют одинаковую степень и взаимно просты;

б) $\deg p_0 = \deg p_1 = 1$, и φ является дробно линейным преобразованием (в частности, если φ было определено всюду, то оно было дробно линейным преобразованием).

M$50\frac{1}{2}\diamond 7$. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ прямую ℓ, пару точек $p_1, p_2 \notin \ell$ и ещё 3 точки a, b, c, такие что никакие 3 из 5 точек p_1, p_2, a, b, c не коллинеарны. Отождествим ℓ с пучком $\wp_1$ всех прямых, проходящих через p_1, сопоставляя каждой прямой $\ell' \in \wp_1$ точку $\ell' \cap \ell \in \ell$; аналогичным же способом отождествим ℓ и с пучком $\wp_2$ всех прямых, проходящих через p_2. Рассмотрим теперь единственное дробно линейное преобразование $\ell \xrightarrow{\gamma_{abc}} \ell$ (или — что то же самое — преобразование $\wp_1 \xrightarrow{\gamma_{abc}} \wp_2$), которое переводит прямые p_1a, p_1b, p_1c из $\wp_1 \simeq \ell$ в прямые p_2a, p_2b, p_2c из $\wp_2 \simeq \ell$. Опишите фигуру, нарисуемую точкой пересечения прямых $\ell' \in \wp_1$ и $\gamma_{abc}(\ell') \in \wp_2$, пока ℓ' пробежит весь пучок $\wp_1$.

[1] в частности, убедитесь, что они тоже будут дробно линейными преобразованиями

[2] рациональная алгебраическая функция — это отношение двух многочленов

M50$\frac{1}{2}$◇8. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ пару прямых ℓ_1, ℓ_2 и не лежащую на них точку O. Докажите, что проектирование $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$ из точки O, переводящее $p \in \ell_1$ в $Op \cap \ell_2 \in \ell_2$ является взаимно однозначным дробно линейным[3] отображением.

M50$\frac{1}{2}$◇9. Рассмотрим пару прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и пару точек p_1, p_2, лежащих на неособой конике $Q \subset \mathbb{P}_2$. Докажите, что отображение $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_Q^{p_2 p_1}} \ell_2$, являющееся композицией двух проекций $\ell_1 \xrightarrow{\pi_{p_1}^{-1}} Q \xrightarrow{\pi_{p_2}} \ell_2$ является взаимно однозначным дробно линейным отображением (см. рис $50\frac{1}{2}$ - 1).

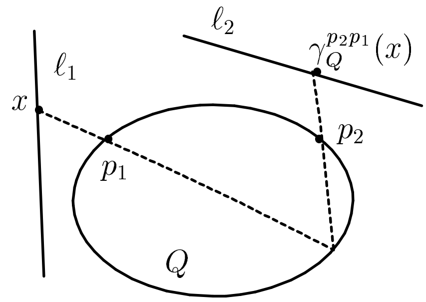

Рис. $50\frac{1}{2}$ - 1. Композиция проекций.

M50$\frac{1}{2}$◇10. Докажите, что любой дробно линейный изоморфизм $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$ между двумя прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ можно (вообще говоря, многими способами) реализовать описанным в зад. M50$\frac{1}{2}$◇9 способом в виде $\gamma_Q^{p_2 p_1}$ с подходящими $Q \subset \mathbb{P}_2$ и $p_1, p_2 \in Q$.

Указание. Пусть γ отображает $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Возьмите любую точку $p_1 \in \mathbb{P}_2$, а p_2 выберите так, чтобы никакие 3 из 5 точек p_1, p_2, $a_1p_1 \cap a_2p_2$, $b_1p_1 \cap b_2p_2$ и $c_1p_1 \cap c_2p_2$ не были коллинеарны, и проведите через эти 5 точек единственную неособую конику Q (см. рис $50\frac{1}{2}$ - 2).

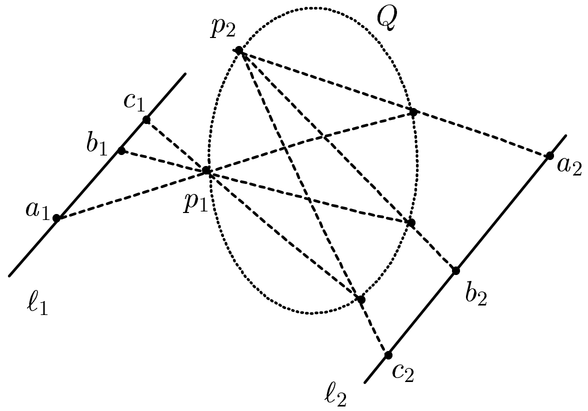

Рис. $50\frac{1}{2}$ - 2. Разложение в композицию.

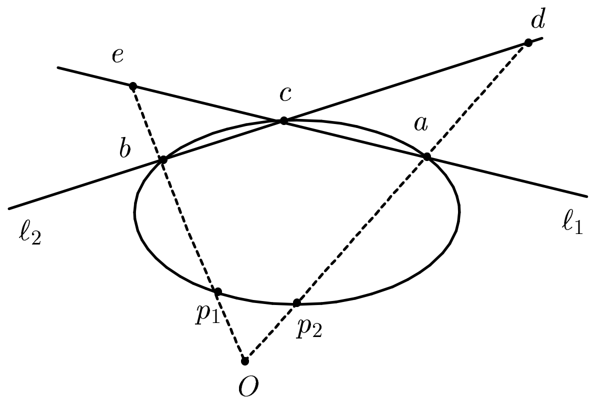

Рис. $50\frac{1}{2}$ - 3. Замечательное соответствие.

M50$\frac{1}{2}$◇11. Пусть точки p_1, p_2, a, b, c лежат на неособой конике Q. Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 прямые ac и bc, и пусть $O = ap_2 \cap bp_1$ (см. рис. $50\frac{1}{2}$ - 3). Отличается ли тут композиция проекций $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_Q^{p_2 p_1}} \ell_2$ из зад. M50$\frac{1}{2}$◇9 от простого проектирования $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$ из зад. M50$\frac{1}{2}$◇8?

M50$\frac{1}{2}$◇12. Одной линейкой постройте сколь угодно плотное множество точек коники, проходящей через данные 5 точек на $\mathbb{P}_2$.

M50$\frac{1}{2}$◇13. Выведите из зад. M50$\frac{1}{2}$◇12 новое доказательство теоремы Паскаля: 6 точек $p_1, p_2, \ldots, p_6$, никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на (неособой) конике, когда коллинеарны точки: $p_1p_2 \cap p_4p_5$, $p_2p_3 \cap p_5p_6$, $p_3p_4 \cap p_6p_1$.

Указание. На самом деле зад. M50$\frac{1}{2}$◇11 задаёт соответствие между прямыми $L \ni O$ и точками $x \in Q$, см. рис. $50\frac{1}{2}$ - 4.

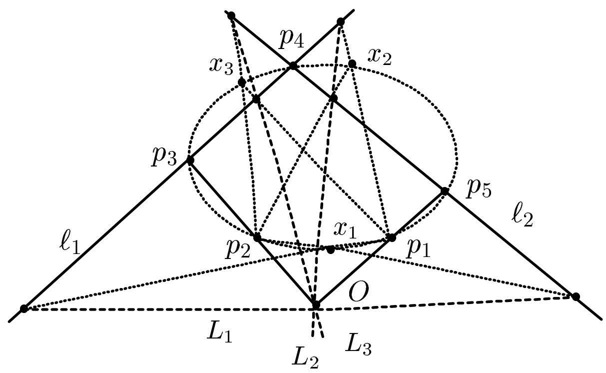

Рис. $50\frac{1}{2}$ - 4. Соответствие $L_i \leftrightarrow x_i$.

M50$\frac{1}{2}$◇14*. Одной линейкой постройте образ данной точки $x \in \ell_1$ при дробно линейном преобразовании $\ell_1 \longrightarrow \ell_2$, переводящем данные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в данные точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$.

[3] т. е. имеет вид $t \longmapsto u(t) = (at+c)/(bt+d)$, где t, u — какие-то аффинные координаты на ℓ_1 и ℓ_2 соответственно