Формальные экспонента, логарифм и бином

М$28\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$ (первообразные). Убедитесь, что для любого ряда $f \in k[[t]]$ существует единственный ряд $g \in k[[t]]$ с *нулевым* свободным членом, такой что $g' = f$ (g называют *первообразным* для f и пишут $g \overset{\text{def}}{=} \int f\,dt$). Выразите коэффициенты g через коэффициенты f. Докажите, что: **а)** $\int (f \pm g)\,dt = \int f\,dt \pm \int g\,dt$; **б)** $\int \lambda f(t)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt$, где $\lambda = \text{const}$; **в)** $\int f'g\,dt = fg - f_0g_0 - \int fg'\,dt$, где $f_0, g_0 \in k$ суть свободные члены рядов f и g.

М$28\frac{1}{2}\diamond 2^\circ$ (логарифм). Ряд $\ln(1+t) \overset{\text{def}}{=} \int \dfrac{dt}{1+t}$ называется *логарифмом* $(1+t)$. Вычислите явно все его коэффициенты. Убедитесь, что формальный ряд $\ln\Big(f(t)\Big)$ определен для любого формального ряда $f(t)$ с единичным свободным членом. Выразите $\Big(\ln(f)\Big)'$ через f и f'.

М$28\frac{1}{2}\diamond 3.$ Пусть f и g — произвольные ряды с единичным свободным членом. Какие из перечисленных ниже равенств равносильны друг другу:
а) $f = g$ **б)** $f' = g'$ **в)** $f'/f = g'/g$ **г)** $(\ln f)' = (\ln g)'$ **д)** $\ln f = \ln g$

М$28\frac{1}{2}\diamond 4.$ Является ли *логарифмическая производная* $f \longmapsto \Big(\ln(f)\Big)'$ биекцией между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом и множеством $k[[t]]$ всех рядов?

М$28\frac{1}{2}\diamond 5^\circ$ (экспонента). Сколько существует рядов $\exp(t)$ с единичным свободным членом, таких что $\exp'(t) = \exp(t)$? Найдите все коэффициенты такого ряда и вычислите $\ln(\exp(t))$.

М$28\frac{1}{2}\diamond 6^\circ$. Убедитесь, что $\exp(h(t))$ определена для любого ряда $h(t)$ с нулевым свободным членом и вычислите $\exp(\ln(1+t))$.

М$28\frac{1}{2}\diamond 7.$ Докажите, что экспоненцирование $N \xrightarrow{\exp} U$ и логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ суть взаимно обратные биекции между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с нулевым свободным членом и множеством $U \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом, причем сложение рядов в N и умножение рядов в U переводятся экспоненцированием и логарифмированием друг в друга, т. е. $\exp(h_1 + h_2) = \exp(h_1)\exp(h_2)$ и $\ln(f_1 f_2) = \ln(f_1) + \ln(f_2)$ $\forall\, h_1, h_2 \in N$ и $\forall\, f_1, f_2 \in U$.

М$28\frac{1}{2}\diamond 8$ (бином Ньютона). Для любого $\alpha \in k$ ряд $(1+t)^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp\big(\alpha \ln(1+t)\big)$ называется *биномом* с показателем α. Вычислите коэффициенты бинома явно. Разверните в формальные степенные ряды $\sqrt[3]{1+2t}$ и $1/\sqrt{1-3t}$.

М$28\frac{1}{2}\diamond 9.$ Убедитесь, что ряд f^α определен для любых $f \in U$, $\alpha \in k$ и лежит в U. Верно ли, что $f^{\alpha_1} f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ и $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$? Является ли ряд f^{-1} обратным к ряду f?

М$28\frac{1}{2}\diamond 10.$ Выразите $(f^\alpha)'$ через α, f и f'.

М$28\frac{1}{2}\diamond 11^*$ (числа Каталана). При практическом вычислении суммы $a_1 \overbrace{+ \cdots +}^{n \text{ плюсов}} a_{n+1}$ из $(n+1)$ слагаемых, в ней реально всегда расставляются скобки так, чтобы точно зафиксировать последовательность выполняемых сложений (по одному в каждый момент времени). Количество всевозможных таких расстановок называется n-тым *числом Каталана* c_n. По определению, $c_0 = 1$. Напишите реккурентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, проинтерпретируйте её как квадратное уравнение на ряд $c(t) = \sum c_\nu t^\nu$, решите его (в $\mathbb{Q}[[t]]$) и получите явное выражение чисел Каталана через подходящие числа сочетаний.

М$28\frac{1}{2}\diamond 12^*$. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по непересекающимся нигде кроме вершин диагоналям?

М$28\frac{1}{2}\diamond 13.$ Всегда ли C_{2n}^n делится на $(n+1)$?