Геометрические эффекты и топологические патологии

М$23\frac{1}{2}\diamond$1 (волосоида). Нарисуйте график какой-нибудь ограниченной и непрерывной всюду, кроме нуля, функции $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такой что ни один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ не существует.

М$23\frac{1}{2}\diamond$2 (разрывы монотонных функций). Пусть функция f определена всюду на отрезке $[a,b]$ и монотонно неубывает на нём. Верно ли, что

а) $\forall\, c\in(a,b)$ существуют (и конечны) оба односторонних предела $\lim\limits_{x\searrow c} f(x)$ и $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$;

б) множество точек разрыва функции f на $[a,b]$ не более, чем счётно?

М$23\frac{1}{2}\diamond$3 (непрерывность выпуклых функций). Функция f называется *выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на интервале I, если она определена всюду на I и для любого отрезка $[a,b]\subset I$ график f над интервалом (a,b) лежит строго выше (соотв. строго ниже) отрезка, соединяющего точку $(a,f(a))$ с точкой $(b,f(b))$. Верно ли, что выпуклость (в любую сторону) влечёт непрерывность?

О «редкости» и «малости». Подмножество $M\subset[a,b]$ называется *всюду плотным*, если любой интервал $I\subset[a,b]$ содержит бесконечно много точек из M. Подмножество $M\subset[a,b]$ называется *нигде не плотным*, если в любом интервале $I\subset[a,b]$ можно указать подинтервал $J\subset I$, не содержащий точек из M. Про подмножество $M\subset[a,b]$, которое можно покрыть не более чем счётной системой интервалов, суммарная длина которых сколь угодно мала, говорят, что оно имеет *меру нуль*.

М$23\frac{1}{2}\diamond$4. Имеет ли меру нуль множество: **а)** рациональных **б)** иррациональных чисел?

М$23\frac{1}{2}\diamond$5. Будет ли канторово множество **а)** нигде не плотным **б)** множеством меры нуль?

М$23\frac{1}{2}\diamond$6. Можно ли представить отрезок в виде объединения счётного набора его

а) подмножеств меры нуль? **б)** нигде не плотных подмножеств?

М$23\frac{1}{2}\diamond$7. Можно ли представить множество иррациональных чисел на $[\,0\,,\,1\,]$ в виде объединения счётного набора замкнутых множеств?

М$23\frac{1}{2}\diamond$8. Докажите, что множество точек непрерывности произвольной функции является пересечением счётного набора открытых множеств.

М$23\frac{1}{2}\diamond$9. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

М$23\frac{1}{2}\diamond$10. Существует ли непрерывная функция $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{f}[\,0\,,\,1\,]$, график которой *всюду плотен*[1] в единичном квадрате?

М$23\frac{1}{2}\diamond$11* (канторова лесенка). Существует ли непрерывная монотонно неубывающая функция $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{f}[\,0\,,\,1\,]$, которая сюрьективно отображает канторово множество на $[\,0\,,\,1\,]$?

М$23\frac{1}{2}\diamond$12* (кривая Пеано). Существует ли сюрьективное и *непрерывное*[2] отображение единичного отрезка $[\,0\,,\,1\,]\subset\mathbb{R}^1$ на единичный квадрат $[\,0\,,\,1\,]\times[\,0\,,\,1\,]\subset\mathbb{R}^2$?

М$23\frac{1}{2}\diamond$13*. Существует ли *непрерывная в обе стороны* биекция[3] между отрезком и квадратом?

М$23\frac{1}{2}\diamond$14* (универсальное замкнутое множество). Существует ли замкнутое подмножество единичного квадрата, среди сечений которого прямыми, параллельными оси OX, встречаются все замкнутые подмножества единичного отрезка?

---

[1] это означает, что любой непустой открытый квадратик пересекается с графиком

[2] отображение $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{\varphi}[\,0\,,\,1\,]\times[\,0\,,\,1\,]$ непрерывно, если $\forall\, x_0\in[\,0\,,\,1\,]$, $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|\varphi(x),\varphi(x_0)|<\varepsilon$.

[3] непрерывные в обе стороны биекции называются *гомеоморфизмами*