Цепные дроби

М$20\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$ (продолжение зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ о кузнечиках). Нарисуем в первом координатном квадранте луч $y = \alpha x$ с *иррациональным* $\alpha > 0$ и рассмотрим ломаные, ограничивающие выпуклые оболочки целых точек, лежащих, соответственно, выше и ниже этого луча (см. рис. 20.1). Занумеруем вершины T_i нижней ломаной чётными, а верхней — нечётными целыми индексами подряд слева направо так, чтобы $[T_0T_2]$ был первым невертикальным ребром на нижней ломаной, и обозначим через (p_n, q_n) координаты точки T_n, а через a_n — число кусков, на которые делится ребро $[T_{n-2}T_n]$ лежащими на нём целыми точками. Попросим теперь кузнечиков в зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ прыгать из начального положения так, чтобы прыжок каждый раз совершал тот крайний кузнечик, который находится по ту же сторону от луча $y = \alpha x$, что и средний. Убедитесь, что кузнечики побывают во всех целых точках обеих граничных ломаных (и только в этих точках), и докажите что:

а) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны;

б) $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2} \end{cases}$ в) $\begin{cases} p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n \end{cases}$

г) $\dfrac{1}{q_n\,(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

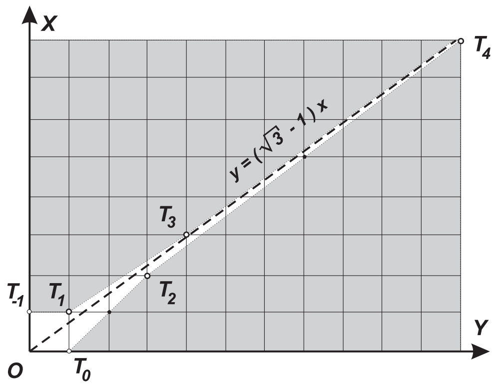

Рис. 20.1.

М$20\frac{1}{2}\diamond 2$. Что изменится, если в зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ взять $\alpha \in \mathbb{Q}$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 3$. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая $\forall\, i \geqslant 0$ $a_i = [r_i]$ (целая часть r_i), $r_{i+1} = (r_i - a_i)^{-1}$ и $r_0 = \alpha$. Как связаны эти a_i с одноимёнными числами из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$, если $\alpha > 0$?

Цепная дробь — это конечное или бесконечное выражение $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots))$ (см. рис. 20.2). Величины a_i называются *элементами* цепной дроби (последний элемент конечной цепной дроби всегда предполагается отличным от 1). Если $a_i \in \mathbb{R}$ и существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots)) = \alpha$, то дробь (20.2) называется *сходящейся*, а α называется её *значением*. Будем называть цепную дробь *канонической*, если $a_0 \in \mathbb{Z}$, и $a_i \in \mathbb{N}$ при $i \geqslant 1$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

Рис. 20.2.

М$20\frac{1}{2}\diamond 4$. Докажите, что все бесконечные канонические цепные дроби сходятся, и, сопоставляя каноническим цепным дробям (как конечным, так и бесконечным) их значения, мы получаем биекцию между множеством таких дробей и $\mathbb{R}$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 5$. Вычислите $1 + 1/(2 + 1/(3 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(3 + \cdots)))))$. Всякая ли периодическая каноническая дробь удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами?

М$20\frac{1}{2}\diamond 6$. Разложите в канонические цепные дроби числа **а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\sqrt{5}$, **в)** $\sqrt{43}$, **г)** $\sqrt{57}$.

Остатки и конвергенты. Любой начальный отрезок $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots))$ цепной дроби (20.2) можно формально свернуть в обыкновенную дробь p_n/q_n, последовательно выполнив (без «сокращений») все предписанные справа налево действия. Так, $p_0/q_0 = a_0/1$, $p_1/q_1 = (a_0a_1 + 1)/a_1$ и т. д. Такая p_n/q_n называется n-той *подходящей дробью* (или *конвергентой*) цепной дроби (20.2). Если (20.2) сходится, то числа $r_n \in \mathbb{R}$, такие что $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots)) = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/r_n)\ldots))$, называются её *остатками*; иными словами, $r_n = a_n + 1/(a_{n+1} + 1/(a_{n+2} + \ldots))$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 7$. Как связаны конвергенты канонической цепной дроби с (p_n, q_n) из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 8$. Какие из соотношений зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ верны для цепных дробей с произвольными $a_i \in \mathbb{R}$? Докажите, что если (20.2) сходится к α, то $\alpha = (r_n p_{n-1} - p_{n-2})\,/\,(r_n q_{n-1} - q_{n-2})$ $\forall n$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 9^*$. Докажите, что цепная дробь (20.2) с положительными $a_i \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum a_i$.