Об упорядочении

Три уровня порядка. Множество называется *частично упорядоченным* (ЧУМом), если про некоторые пары его элементов a, b можно сказать $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, так что при этом выполнены три свойства:

(1) $a \leqslant a \ \forall a$, **(2)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, **(3)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Подмножество $[\ldots x] \stackrel{\text{def}}{=} \{ m \in M \mid m \leqslant x \}$ ЧУМа M называется *начальным отрезком M до x*. ЧУМ называется *упорядоченным* (или *линейно упорядоченным*), если отношение порядка определено *для любой* пары элементов. В линейно упорядоченном множестве можно ввести отношение $a < b$ означающее, что $a \neq b$ и $a \leqslant b$; тогда $\forall a, b$ будет выполнена альтернатива: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Элемент $\mu \in M$ ЧУМа M называется *минимальным*, если $\forall x \in M$ из неравенства $x \leqslant \mu$ вытекает равенство $x = \mu$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне* или *индуктивно* упорядоченным, если в любом его подмножестве имеется *минимальный* элемент. Два вполне упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, *сохраняющее порядок*. Классы подобных вполне упорядоченных множеств называются *трансфинитными числами*.

M$13\frac{1}{2}\diamond$1°. Выясните, какие из указанных ниже отношений «$\preccurlyeq$» на множествах M являются упорядочениями и какого типа: **а)** $M = \mathbb{N}$ и $a \preccurlyeq b \iff b$ делится на a; **б)** то же для $M = \mathbb{Z}$;
в) $M = \mathbb{N},\ \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Q}$ с обычным $\leqslant$ для чисел; **г)** то же для $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\infty \geqslant n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
д) M есть множество всех подмножеств некоторого множества A и $a \preccurlyeq b \iff a \subseteq b$;
е) M есть множество вершин ориентированного графа Γ и $a \preccurlyeq b \iff$ в Γ есть ребро $\overrightarrow{ab}$.

M$13\frac{1}{2}\diamond$2°. Дайте определение максимального элемента ЧУМа и приведите пример ЧУМа с несколькими максимальными элементами.

M$13\frac{1}{2}\diamond$3°. Верно ли, что любой начальный отрезок произвольного ЧУМа линейно упорядочен?

M$13\frac{1}{2}\diamond$4 (принцип трансфинитной индукции). Пусть множество M вполне упорядочено, и про его элементы высказано некое утверждение $\mathfrak{U}$, которое истинно для минимального элемента множества M, и при всех $m \in M$ из того, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall x < m$, следует, что $\mathfrak{U}$ истинно для m. Докажите, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall m \in M$.

M$13\frac{1}{2}\diamond$5. Может ли вполне упорядоченное множество быть подобно своему начальному отрезку, отличному от всего множества?

M$13\frac{1}{2}\diamond$6. Докажите, что отношение $a \preccurlyeq b \iff$ «a подобно начальному отрезку b» вполне упорядочивает трансфинитные числа.

Полные ЧУМы. ЧУМ M называется *полным*, если для каждого линейно упорядоченного подмножества $U \subset M$ существует элемент $m \in M$, такой что $u \leqslant m \ \forall u \in U$.

M$13\frac{1}{2}\diamond$7* (теорема о неподвижной точке). Докажите, что любое отображение $M \xrightarrow{f} M$ из полного ЧУМа в себя, обладающее свойством $x \leqslant f(x) \ \forall x \in M$, имеет неподвижную точку (т. е. $f(x_0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$).

Аксиома выбора входит в список аксиом «строгой» теории множеств и утверждает, что в любом множестве непустых множеств можно выбрать по одному элементу из каждого множества (иначе говоря, для любого множества $\mathfrak{M}$, элементы которого сами суть непустые множества, существует отображение f из $\mathfrak{M}$ в объединение всех множеств $M \in \mathfrak{M}$, такое что $f(M) \in M \ \ \forall M \in \mathfrak{M}$).

M$13\frac{1}{2}\diamond$8*. Выведите из аксиомы выбора и зад. M$13\frac{1}{2}\diamond$7 следующие два утверждения[1]:
а) (лемма Цорна) В любом полном ЧУМе есть максимальный элемент.
б) (теорема Цермело) Любое множество можно вполне упорядочить.

[1] решение этих (весьма трудных) задач не стыдно подглядеть в книгах: *Ван Дер Варден. Алгебра.* М. «Мир» (1976), стр. 246–249 или *П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.*. М. «Наука» (1977), стр. 80–83.