# Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

*«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»*
*(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)*

**М$10\frac{1}{2}\diamond$1.** Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в $1\,г,\ 3\,г,\ 9\,г,\ 27\,г,\ \ldots$ (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует $m$ цифр, коими служат символы: $\overline{0},\ \overline{1},\ \ldots,\ \overline{m-1}$. Под $n$-разрядным числом $m$-ичной системы мы понимаем любую последовательность из $n$ $m$-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$. Количество всех $n$-разрядных чисел $m$-ичной системы с суммой цифр $k$ мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

**М$10\frac{1}{2}\diamond$2.** Запишите десятичные числа 43, 57 и 1999 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

**М$10\frac{1}{2}\diamond$3.** Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число $\ell$ может быть единственным образом записано в $m$-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$.

**М$10\frac{1}{2}\diamond$4.** Сколько всего $n$-разрядных чисел в $m$-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

**М$10\frac{1}{2}\diamond$5*.** Докажите, что $\beta_m(n,k)$ равно коэффициенту при $x^k$ в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)^n$$

и удовлетворяет соотношениям $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\ n\,(m-1)-k)$ и

$$\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \cdots + \beta_m(n-1,k-m+1)\,.$$

**М$10\frac{1}{2}\diamond$6*.** Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел? ([1])

**Числа Бернулли $B_k$** начинаются с $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 + C^1_{k+1}B_1 + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\right)\,.$$

**М$10\frac{1}{2}\diamond$7*.** Покажите, что сумма $k$-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0\,n^{k+1} + C^1_{k+1}B_1\,n^k + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\,n\right)\,.$$

**М$10\frac{1}{2}\diamond$8*.** Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + (n-1)^{10}$.

**М$10\frac{1}{2}\diamond$9*.** Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

**М$10\frac{1}{2}\diamond$10*.** Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

[1] Подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$.

[2] Предупреждение: «явного» выражения $B_n$ через $n$ не существует!