Теорема существования решения обыкновенного дифференциального уравнения

Постановка задачи. На плоскости XOY заданы: прямоугольник $\Pi = \{\,(x,y)\mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\,\}$ точка (x_0, y_0), лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x,y)$, правая часть которого $\Pi \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на Π. Мы докажем, что существует ε-окрестность U_ε точки x_0 и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \xrightarrow{f} [c,d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

М34$\frac{1}{2}$◇1. Зададимся некоторой ε-окрестностью U_ε точки x_0 и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathscr{F}^{\uparrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid \ \forall\, x{\in}U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) > F(x,\varphi(x))\,\}$$
$$\mathscr{F}_{\downarrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid \ \forall\, x{\in}U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) < F(x,\varphi(x))\,\}$$

Докажите, что $\exists\ \varepsilon > 0$: оба множества $\mathscr{F}^{\uparrow}$, $\mathscr{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от x_0 график любой функции из $\mathscr{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathscr{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

М34$\frac{1}{2}$◇2 (существование решения). Определим функцию $f(x)$ справа от x как $\inf\limits_{\varphi\in\mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, слева от x как $\sup\limits_{\varphi\in\mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$ и положим $f(x_0) = y_0$. Докажите, что f существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x,y)$.

Обозначения. Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x,y)|$. Обозначим через D_δ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где δ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\,(x,y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0|\}$ лежала целиком внутри Π. Обозначим через $\mathscr{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, график которых содержится в B_d.

М34$\frac{1}{2}$◇3. Докажите, что $\mathscr{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием

$$\varrho(\varphi,\psi) = \sup_{x\in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|\ .$$

М34$\frac{1}{2}$◇4 (лемма Асколи - Арцела). Дано некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что для того, чтобы любая ограниченная последовательность функций из $\mathscr{F}$ содержала поточечно сходящуюся подпоследовательность[1], необходимо и достаточно, чтобы все функции в $\mathscr{F}$ были ограничены общей константой и *единообразно* непрерывны в том смысле, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathscr{F}$.

М34$\frac{1}{2}$◇5 (ломаные Эйлера). Разобъём D_δ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$ и продолжая её влево и вправо по такому правилу: для $k = 0, 1, 2, \ldots$ над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ и для $k = 0, -1, -2, \ldots$ над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ график $\varphi(x)$ является прямой с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$. Убедитесь, что все φ_n лежат в $\mathscr{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathscr{M}_\delta$.

М34$\frac{1}{2}$◇6. Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

М34$\frac{1}{2}$◇7. Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из зад. М34$\frac{1}{2}$◇5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x,y)$ (мы ещё вернёмся к этому в зад. М34$\frac{2}{3}$◇8).

[1] предел которой не обязан принадлежать $\mathscr{F}$