Метрические пространства

Метрическое пространство — это множество $\mathscr{M}$, на котором для каждой пары элементов (p,q) задано неотрицательное *расстояние* $\varrho(p,q) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда $p=q$, и удовлетворяющее *неравенству треугольника*: $\varrho(p,q)+\varrho(q,r) \geqslant \varrho(p,r)\ \forall\, p,q,r \in \mathscr{M}$.

М29$\frac{1}{2}$◇1°. Какие из перечисленных ниже множеств с «расстоянием» являются метрическими пространствами: **а)** непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ с $\varrho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

б) $\mathbb{Q}$ с $\varrho(x,y)=|x-y|$ **в*)** отрезки числовой прямой с $\varrho\Big([a,b]\,,\,[c,d]\Big)=|a-c|+|b-d|$

г) $\mathbb{R}^n$ с $\varrho\Big((x_1,\,\ldots\,,x_n)\,,\,(y_1,\,\ldots\,,y_n)\Big)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ **д)** то же, но $\varrho=\max_i|x_i-y_i|$

е) ограниченные последовательности $(a_n)\subset\mathbb{R}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big)=\sup_i|a_i-b_i|$

ж*) $\Big\{\,(a_n)\subset\mathbb{R}\,|\,$ ряд $\sum a_i^2$ сходится $\Big\}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big)=\sqrt{\sum(a_n-b_n)^2}$

Шары и топология. В метрическом пространстве $\mathscr{M}$ для любого вещественного $\varepsilon>0$ подмножество $D_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\mid\varrho(p,x)<\varepsilon\}$ называютмя *открытым*, а $\overline{D}_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\mid\varrho(p,x)\leqslant\varepsilon\}$ — *замкнутым шаром* радиуса ε с центром p (обязательно продумайте, как устроены шары в пространствах зад. М29$\frac{1}{2}$◇1). Открытый шар $D_\varepsilon(p)$ также называют *ε-окрестностью* точки $p\in\mathscr{M}$. Предельные, внутренние и изолированные точки подмножеств $X\subset\mathscr{M}$, открытые и замкнутые множества, пределы последовательностей $(x_n)\subset\mathscr{M}$, непрерывные функции $\mathscr{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ определяются в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ дословно так же, как в $\mathscr{M}=\mathbb{R}$. Например, последовательность элементов $(x_n)\subset\mathscr{M}$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ n\in\mathbb{N}:\ \varrho(x_m,x_k)<\varepsilon\ \ \forall\ m,k>n$. Метрическое пространство называется *полным*, если все последовательности Коши имеют в нём пределы.

М29$\frac{1}{2}$◇2°. Может ли иметь предел последовательность, не являющаяся последовательностью Коши? Может ли последовательность Коши иметь несколько пределов?

М29$\frac{1}{2}$◇3. Подмножество $M\subset\mathscr{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $C\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathscr{M}$, такие что $\varrho(m,x)<C\ \forall\, x\in M$. Всякая ли ограниченная последовательность содержит подпоследовательность Коши: **а)** в $\mathbb{R}^n$? **б)** в произвольном метрическом пространстве?

М29$\frac{1}{2}$◇4. Какие из метрических пространств зад. М29$\frac{1}{2}$◇1 полны?

М29$\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что пересечение конечных и объединение любых наборов открытых множеств открыто, и аналогичные свойства замкнутых множеств. Верно ли, что $U\subset\mathscr{M}$ открыто $\Longleftrightarrow\mathscr{M}\setminus U$ замкнуто? Открыты ли открытые шары? Замкнуты ли замкнутые?

М29$\frac{1}{2}$◇6 (теорема о вложенных шарах). Равносильна ли полнота метрического пространства тому, что любая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение? Всегда ли это пересечение — одна точка?

М29$\frac{1}{2}$◇7 (теорема о неподвижной точке). Отображение $\mathscr{M}\xrightarrow{F}\mathscr{M}$ называется *сжимающим*, если $\exists\, c\in\mathbb{R}\ :\ 0<c<1$ и $\varrho(F(x),F(y))\leqslant c\cdot\varrho(x,y)\ \forall\, x,y\in\mathscr{M}$. Докажите, что если $\mathscr{M}$ полно, то любое сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку, причём к ней сходится любая последовательность вида x, $F(x)$, $F(F(x))$, ...

М29$\frac{1}{2}$◇8. Пусть $X\subset\mathscr{M}$ удовлетворяет *условию Больцано–Вейерштрасса*: любая последовательность элементов X имеет в X предельную точку. Докажите, что

а) $\forall\,\varepsilon>0$ X покрывается конечным множеством шаров радиуса $\leqslant\varepsilon$

б) $\forall$ открытого покрытия X можно указать $\varepsilon>0$ так, что всякий шар радиуса $\leqslant\varepsilon$ с центром в X целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия

в) в любом покрытии X открытыми множествами содержится конечное подпокрытие

М29$\frac{1}{2}$◇9 (компактные подмножества $\mathbb{R}^n$). Докажите, что для подмножества $X\subset\mathbb{R}^n$ (с любой метрикой из зад. М29$\frac{1}{2}$◇1) условие Больцано–Вейерштрасса, условие одновременной ограниченности и замкнутости, и условие наличия в любом открытом покрытии конечного подпокрытия попарно эквивалентны.