Корни многочленов.

Обозначения. Пусть $\mathbb{F}$ обозначает любое из полей $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Множество многочленов от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается через $\mathbb{F}[x]$. Число α называется *m-кратным корнем f*, если $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, где $g(\alpha) \neq 0$. Для любого $f \in \mathbb{F}[x]$ частное $(f(u)-f(w))/(u-v)$ является *многочленом* от переменных u, v, и многочлен $f'(x)$, получающийся подстановкой в это частное $u = v = x$, называется *производным* от f.

М$22\frac{1}{2}$◇1. Убедитесь, что определение f' корректно и для $f \in \mathbb{R}[x]$ согласуется с **Лст. № 23**.

М$22\frac{1}{2}$◇2. Какие импликации «$\Rightarrow$» и «$\Leftarrow$» имеются между следующими условиями на $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f \in \mathbb{F}[x]$: **а)** $f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot g(x)$ в $\mathbb{C}[x]$ **б)** $f'(\alpha) = 0$ **в)** $\deg \text{НОД}(f, f') > 0$

М$22\frac{1}{2}$◇3. Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$ имеет корень $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Будет ли корнем f и $\overline{z} = x - iy$?

М$22\frac{1}{2}$◇4. Разложите $x^8 + 128$ в произведение вещественных квадратных трёхчленов.

М$22\frac{1}{2}$◇5 (формулы Виета). Каков коэффициент при x^k у $f(x) = a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,\cdots\,(x-\alpha_n)$?

М$22\frac{1}{2}$◇6. Можно ли заменой $x = t + \alpha$ уничтожить в $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$
а) член с x^{n-1} **б)** два члена с x^{n-1} и с x^{n-2}?

М$22\frac{1}{2}$◇7 (дискриминант). В обозначениях зад. М$22\frac{1}{2}$◇5 число $D_f \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{2n-2} \prod\limits_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* f. Выразите через p и q дискриминант: **а)** x^2+px+q **б)** x^3+px+q.

М$22\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что любой вещественный кубический многочлен f имеет в $\mathbb{C}$ либо три вещественных корня (возможно, кратных), либо ровно один вещественный и два невещественных комплексно сопряжённых корня. Как различить эти случаи глядя на D_f?

М$22\frac{1}{2}$◇9 (решение кубического уравнения в тригонометрических функциях). Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни многочлена $4x^3 - 3x - a$ с $a \in \mathbb{R}$ и $|a| \leqslant 1$ через тригонометрические функции. При каких условиях на p, q многочлен x^3+px+q можно заменой $x \mapsto \alpha x$ сделать пропорциональным многочлену $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a| \leqslant 1$?

М$22\frac{1}{2}$◇10. Решите уравнения: **а)** $x^3 - 3x + 1 = 0$, **б)** $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

М$22\frac{1}{2}$◇11 (решение кубического уравнения методом Кардано). Придумайте квадратное уравнение, корни z_1, z_2 которого таковы, что $\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$ является корнем кубического трёхчлена $f(x) = x^3 + px + q$. Какой знак должен быть у D_f, чтобы числа z_1, z_2 оказались:
а) вещественны и различны? **б)** комплексно сопряжены?

М$22\frac{1}{2}$◇12. Найдите вещественные корни многочленов: **а)** $x^3 - x + 1$; **б*)** $x^3 + 2x^2 + x + 1$.

М$22\frac{1}{2}$◇13. Вычислите в радикалах: **а)** $\cos(\pi/9)$, **б)** $\cos(\pi/12)$, **в*)** $\cos(\pi/7)$.

Топология поля $\mathbb{C}$. Под ε-окрестностью числа $z_0 \in \mathbb{C}$ мы понимаем $D_e(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, т. е. открытый круг радиуса ε с центром в z_0. Пределы комплексных последовательностей и функций, непрерывность функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, предельные и изолированные точки комплексных множеств, открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{C}$ и т. п. определяются дословно так же, как в $\mathbb{R}$.

М$22\frac{1}{2}$◇14°. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе суммы и произведения двух сходящихся комплексных последовательностей. Верно ли, что $z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0$ в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$ в $\mathbb{R}$?

М$22\frac{1}{2}$◇15. Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен, отличный от константы. Верно ли, что:
а) $\forall$ замкнутого круга $D \subset \mathbb{C}$ $\exists\, z_1, z_2 \in D$: $|f(z_1)| = \inf_D |f(z)|$ и $|f(z_2)| = \sup_D |f(z)|$;
б) $|f(z)| \to \infty$ при $z \to \infty$; **в)** $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$: $|f(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |f(z)|$?

М$22\frac{1}{2}$◇16. Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$, и $f(z_0) \neq 0$. Найдите вблизи z_0 точку z_1, в которой[1] $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, и выведите из этого, что любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ имеет корень в $\mathbb{C}$.

ПОДСКАЗКА: положим $z = z_0 + w$ и разложим $f(z)$ по возрастающим степеням w: $f(z) = f(z_0) + a_1w + a_2w^2 + \cdots$. Рассмотрите наименьшее m, для которого $a_m \neq 0$, т.е. $f(z) = f(z_0) + a_mw^m +$ более старшие степени w, возьмите $\vartheta \in \mathbb{C}$ так, чтобы $a_m\vartheta^m = -f(z_0)$, и ищите z_1 в виде $z_0 + t\,\vartheta$ с $t \in \mathbb{R}$[1]