Радикальные преобразования

(напоминания из алгебры перед грядущими экзаменами)

… здесь вам не университет: тут головой думать надо!
(из армейского юмора)

Абсолютная величина. Напомним, что через $|a-b|$ (читается «модуль a минус b») обозначается расстояние между точками a и b на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Таким образом, $|a-b|=|b-a|$ равно той из двух разностей $(a-b)$, $(b-a)$, которая неотрицательна. Вместо $|a-0|=|0-a|$ пишут просто $|a|$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$. Из перечисленных ниже утверждений верные докажите, а неверные опровергните и, по возможности, исправьте: **а)** $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\alpha+a}{\beta+b}<\dfrac{a}{b}\ \forall\,\alpha,a,\beta,b\in\mathbb{R}$ с $\beta,b>0$;

б) $a\leqslant b$ и $\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\dfrac{a}{\beta}\leqslant\dfrac{b}{\alpha}\ \forall\,a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; **в)** $|a-b|+|b-c|=|a-c|\ \forall\,a,b,c\in\mathbb{R}$;

г) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\ \forall\,a,b\in\mathbb{R}$; **д)** $|a|+|b|\geqslant|a+b|\ \forall\,a,b\in\mathbb{R}$; **е)** $\sqrt{x^2}=x\ \forall\,x\in\mathbb{R}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 2$. Без помощи калькулятора выясните, что больше:

а) $\sqrt{37}-6$ или $1/10$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ или $\sqrt{5}-2$ **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ или 5; **г)** $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 3$. Какие из перечисленных ниже пар чисел обратны друг другу:

а) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; **б)** $\left(2\sqrt{20}+9\right)^{100}$ и $\left(2\sqrt{20}-9\right)^{100}$; **в)** $\left(7+5\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^3$,;

г) $\left(7+5\sqrt{2}\right)^4$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^4$; **д)** $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt[3]{9}-3$ и $3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 4$. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: **а)** $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$; **г)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; **д)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; **е*)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; **ж*)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 5$ (формулы Виета). В произведении $(x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_m)$ раскрыли скобки и сгруппировали слагаемые по степеням x. Чему будет равен коэффициент при x^k? Из скольких слагаемых он состоит?

M$12\frac{1}{2}\diamond 6$. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть:
а) $1+\sqrt{7}$; **б)** $5-2\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 7$. Какими должны быть α, β, чтобы $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=a+\sqrt{b}$ для данных a, b? Выделяя полный квадрат или куб, избавьтесь от наружнего радикала в выражениях:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$; **г)** $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$; **д)** $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$;

е) $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}$; **ж)** $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; **з)** $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$; **и)** $\sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 8$. Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. Верно ли, что при $\alpha\neq\beta$ числа $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ либо оба рациональны, либо оба иррациональны?

M$12\frac{1}{2}\diamond 9$. Рациональны ли числа: **а)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; **в)** $\left(\sqrt{5}+1\right)^3-\left(\sqrt{5}-1\right)^3$;

г) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5+\left(1-\sqrt{2}\right)^5$; **д)** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{11}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{11}$; **е)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{10}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 10$. Вычислите первую тысячу знаков после запятой у
а) $\left(12-\sqrt{143}\right)^{2000}$; **б*)** $\left(7+\sqrt{48}\right)^{1999}$; **в*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2000}$; **г*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2001}$.

M$12\frac{1}{2}\diamond 11^*$. Чётна или нечётна целая часть числа $\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$?