Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)

М$10\frac{1}{2}$◇1. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в $1\,г$, $3\,г$, $9\,г$, $27\,г$, ... (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует m цифр, коими служат символы: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$. Под n-разрядным числом m-ичной системы мы понимаем любую последовательность из n m-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$. Количество всех n-разрядных чисел m-ичной системы с суммой цифр k мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

М$10\frac{1}{2}$◇2. Запишите десятичные числа 57, 179 и 2006 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

М$10\frac{1}{2}$◇3. Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число ℓ может быть единственным образом записано в m-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$.

М$10\frac{1}{2}$◇4. Сколько всего n-разрядных чисел в m-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

М$10\frac{1}{2}$◇5. Как связаны $\beta_m(n,k)$ и коэффициент при x^k в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)^n$$

М$10\frac{1}{2}$◇6. Справедливы ли соотношения:
а) $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\, n\,(m-1) - k)$
б) $\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \cdots + \beta_m(n-1,k-m+1)$

М$10\frac{1}{2}$◇7. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел[1]?

Числа Бернулли B_k начинаются с $B_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C_{k+1}^0 B_0 + C_{k+1}^1 B_1 + \cdots + C_{k+1}^{k-1} B_{k-1} \right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇8*. Покажите, что сумма k-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C_{k+1}^0 B_0\, n^{k+1} + C_{k+1}^1 B_1\, n^k + \cdots + C_{k+1}^{k-1} B_{k-1}\, n \right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇9*. Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + (n-1)^{10}$.

М$10\frac{1}{2}$◇10*. Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

М$10\frac{1}{2}$◇11*. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

[1] подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$

[2] предупреждение: «явного» выражения B_n через n не существует...