# Арифметика на клетчатой бумаге

**М$6\frac{1}{2}\diamond$1.** Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр? Всякий ли отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри, можно достроить до такого треугольника?

**М$6\frac{1}{2}\diamond$2.** Дан параллелограмм площадью 1 кл. с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

**а)** Может ли он накрывать какие-либо узлы кроме вершин?

**б)** Может ли одна из его диагоналей быть сколь угодно длинной?

**М$6\frac{1}{2}\diamond$3.** Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(p, q) = 1$. Опишите множество всех узлов, ближайших к прямой $px = qy$, но не лежащих на ней, и найдите расстояние от таких узлов до этой прямой.

**М$6\frac{1}{2}\diamond$4$^*$ (задача о кузнечиках).** Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

**а)** начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

**б)** кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

**в)** для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

**М$6\frac{1}{2}\diamond$5$^*$.** Каждый узел клетчатой бумаги за исключением узла, находящегося в начале координат, накрыли кругом радиуса $179^{-2005}$ кл. с центром в этом узле. Можно ли из начала координат выпустить (бесконечный) луч, не пересекающий ни одного из этих кругов?

**Дроби на клетчатой бумаге.** Условимся изображать дробь $p/q$ радиус вектором точки с координатами $(q, p)$. При этом равным дробям будут отвечать сонаправленные векторы, так что величина дроби измеряет *наклон*[1] такого вектора по отношению к оси абсцисс.

**М$6\frac{1}{2}\diamond$6$^\circ$.** Пусть $p_1, p_2$ — любые, а $q_1, q_2$ — положительные числа, такие что $(p_1/q_1) < (p_2/q_2)$. Опишите все случаи, когда $(p_1/q_1) + (p_2/q_2) = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)$, а в остальных случаях выясните какими неравенствами связана правая часть с каждым из слагаемых левой части.

**М$6\frac{1}{2}\diamond$7$^*$ (разложение в цепную дробь).** Сопоставим положительному рациональному числу $\alpha = p/q$ с $\text{НОД}(p, q) = 1$ последовательность целых чисел $a_0$, $a_1$, $a_2$, … и последовательность рациональных чисел $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, полагая[2]: $\alpha_0 = \alpha$, $a_0 = [\alpha_0]$ и $\alpha_k = (\alpha_{k-1} - a_{k-1})^{-1}$, $a_k = [\alpha_k]$ при $k \geqslant 1$. Покажите, что через конечное число шагов мы получим целое $\alpha_m = a_m$, причём будет выполнено равенство[3] $\alpha = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + \ldots + (a_{m-1} + 1/a_m)\ldots)))$, и выясните, как связаны числа $a_\nu$ с количествами прыжков кузнечиков из зад. М$6\frac{1}{2}\diamond$4 и с отысканием по алгоритму Евклида целых чисел $(x, y)$, таких что $px + qy = 1$.

**М$6\frac{1}{2}\diamond$8$^*$.** Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны $AD$ в направлении точки $E$, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 57 : 179$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет, то почему, а если да, то после скольких отражений[4] от стенок?

**М$6\frac{1}{2}\diamond$9$^*$.** Существует ли (хоть какой-нибудь) параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

---

[1] точнее, *тангенс ориентированного угла* наклона

[2] значком $[x]$ (читается «*целая часть* $x$») обозначается наибольшее целое число, не превосходящее $x$

[3] например, для $\alpha = 17/23$ получаем: $\dfrac{17}{23} = 0 + \dfrac{1}{23/17} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{17/5}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6/5}}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$

[4] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»