УДК 512.581
512.772.3

Светлой памяти
Андрея Николаевича Тюрина

t-стабильности и t-структуры на триангулированных категориях

А. Городенцев, С. Кулешов[1], А. Рудаков

Мы вводим новое понятие *t-стабильности* в триангулированной категории, обобщающее данные стабильности Т. Бриджленда [6], и изучаем связь между t-стабильностями и t-структурами. Даётся полная классификация t-стабильностей и ограниченных t-структур на производных категориях когерентных пучков на $\mathbb{P}_1$ и на эллиптической кривой.

1. Введение

Около десяти лет назад авторы пытались обобщить гизекеровскую концепцию стабильности для когерентных пучков без кручения так, чтобы она стала применима и к объектам производных категорий когерентных пучков, а также более общих линейных триангулированных категорий, позволяя строить в них канонические фильтрации, ставить и исследовать соответствующие проблемы модулей и т. п. Однако удовлетворительного определения нам тогда получить не удалось.

Ситуция изменилась после недавних работ Т. Бриджленда [6], [7], где он предложил эффективный способ обобщения фильтрации Гардера – Нарасимхана на триангулированные категории и сформулировал новую концепцию стабильности, основанную на своего рода «комплексификации» мамфордовского наклона $\mu = c_1/r$, названной Бриджлендом «центральным зарядом». Эти работы были мотивированы желанием, во-первых, придать ясный смысл «физическим концепциям» М. Р. Дугласа, опубликованным в серии весьма туманных, с математической точки зрения, но чрезвычайно вдохновляющих статей[2], а во-вторых, связать автоэквивалентности производных категорий и явления типа действия

[1] С. Кулешов частично поддержан грантом INTAS OPEN-2000-269.
[2] см., например, [9] и имеющиеся там дальнейшие ссылки

группы кос на исключительных наборах с преобразованиями монодромии, которые возникают при вариации данных стабильности. Попытка построить конечномерное такое «многообразие модулей» данных стабильности, на котором уместно было бы изучать монодромию, и составляет ядро работ [6], [7], что привело Т. Бриджленда к необходимости наложить на основной модулярный параметр — центральный заряд — существенные ограничения, не очень естественные в контексте классической теории пучков. В частности, бриджлендовские данные стабильности не включают в себя стабильность по Гизекеру, а также ряд других геометрически интересных функториальных фильтраций.

Комбинируя подход Т. Бриджленда с нашими предыдущими исследованиями (частично опубликованными в работе [15]), мы предлагаем в этой заметке понятие стабильности в триангулированной категории (или, короче, *t-стабильности*), которое обобщает определение Т. Бриджленда и позволяет единообразно рассматривать (как частные случаи дестабилизирующих, в нашем смысле, фильтраций) и канонические фильтрации Гардера – Нарасимхана, возникающие из наклонов гизекеровского типа, и гротендиковскую фильтрацию пучка подпучками кручения чистой коразмерности, и ортогональное разложение объекта производной категории по исключительному базису. Таким образом, мы ставим во главу угла задаваемое данными стабильности функториальное разложение объектов в башню Постникова (каноническую *t-фильтрацию*), а не модулярные свойства центрального заряда.

Содержание работы таково. В § 2 мы напоминаем основные свойства данных стабильности на абелевой категории и обсуждаем различные способы задания таких данных. В § 3 даётся определение t-стабильности в триангулированной категории и рассматривается несколько базисных примеров задания t-стабильности на производных категориях. В частности, стабильность по Гизекеру (см. стр. 8), а также ортогональное разложение объекта по исключительному базису (см. предложение 3.6) являются такими примерами t-стабильностей на производных категориях когерентных пучков. В § 4 мы изучаем свойства дестабилизирующих систем Постникова, ассоциированных с t-стабильностью и обобщающих понятие фильтрации Гардера – Нарасимхана. В § 5 мы вводим частичный порядок на множестве всех t-стабильностей на данной триангулированной категории и обсуждаем процедуры огрубления и утоньшения t-стабильностей. В § 6 мы описываем все t-стабильности в производной категории когерентных пучков на проективной прямой $\mathbb{P}_1$ и в качестве следствия получаем полный список ограниченных t-структур на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$. В § 7 аналогичная классификация строится для производной категории когерентных пучков на эллиптической кривой.

2. Данные стабильности на абелевых категориях

Понятие стабильности в категории когерентных пучков было введено Мамфордом при построении многообразий модулей векторных расслоений на кривых средствами геометрической теории инвариантов и затем неоднократно обобщалось в связи с необходимостью строить компактные семейства когерентных пучков на произвольных алгебраических многообразиях (см., например, [10, 13, 14]). В очень общих чертах, задача построения таких семейств сводится (например, путём представления всех пучков семейства в виде пучка нулевых когомологий некоторого комплекса локально-свободных пучков, элементы которого фиксированы, но дифференциалы могут меняться, давая искомые модули) к задаче описания проективного фактора по действию редуктивной алгебраической группы на векторном пространстве (в нашем примере — это действие автоморфизмов элементов комплекса на пространстве дифференциалов). При этом стабильными называются пучки, орбиты которых замкнуты, а полустабильными — пучки, замыкание орбиты которых не содержит нуля. Известный геометрический критерий стабильности Гильберта, который сводит исследование стабильности данного вектора к анализу его разложения по собственным подпространствам действия максимального тора, обычно удаётся переформулировать в терминах исходной категории пучков, где он превращается в набор арифметических условий на дискретные (топологические) инварианты пучка.

А именно, каждому пучку без кручения F сопоставляется вектор (иногда однокомпонентный, т. е. просто число) $\mu(F)$, так что F оказывается полустабильным (в смысле геометрической теории инвариантов) тогда и только тогда, когда для любого его подпучка $E \subset F$ выполняется неравенство $\mu(E) \leqslant \mu(F)$ (векторы сравниваются лексикографически), и полустабильный пучок F будет стабильным, если он прост (т. е. $\mathrm{Hom}\,(F,F) = \mathbb{C}$).

Компонентами вектора наклона являются отношения подходящих аддитивных функций на группе Гротендика $K_0(\mathcal{C}oh\,)$ категории когерентных пучков. Поэтому наклон всегда удовлетворяет следующей ключевой *лемме о качелях*:

$$\begin{aligned} \mu(E) < \mu(F) \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(F) < \mu(G) \\ \mu(E) = \mu(F) \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(F) = \mu(G) \\ \mu(E) > \mu(F) \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(F) > \mu(G) \end{aligned} \tag{2.1}$$

для любой точной последовательности пучков без кручения

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

из которой вытекают следующие два, уже чисто категорных, следствия:

(i) $\mathrm{Hom}\,(E,F) = 0$, если E и F полустабильны и $\mu(E) > \mu(F)$;

(ii) каждый пучок без кручения X обладает канонической фильтрацией Гардера – Нарасимхана

$$\begin{tikzcd} X = F^0X \arrow[d] & F^1X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^2X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, hook'] & F^nX \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^{n+1}X = 0\,. \arrow[l, hook'] \\ G_1 & G_2 & G_3 & & G_n & \end{tikzcd}$$

(здесь каждый вертикальный эпиморфизм — часть короткой точной последовательности $0 \longrightarrow F^iX \longrightarrow F^{i-1}X \longrightarrow G_i \longrightarrow 0$), все факторы которой $G_i = F^{i-1}X/F^iX$ полустабильны и $\mu(G_i) < \mu(G_j)$ для всех $i < j$.

Именно эти свойства были взяты в качестве определяющих в первой, предпринятой в [15], попытке ввести абстрактные данные стабильности на произвольной абелевой категории.

Определение 2.1. *Скажем, что на абелевой категории $\mathcal{A}$ задана структура стабильности, если на её объектах определен такой предпорядок, что всякая короткая точная последовательность $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ удовлетворяет лемме о качелях:*

либо	$A \prec B \;\Leftrightarrow\; A \prec C \;\Leftrightarrow\; B \prec C,$
либо	$A \succ B \;\Leftrightarrow\; A \succ C \;\Leftrightarrow\; B \succ C,$
либо	$A \asymp B \;\Leftrightarrow\; A \asymp C \;\Leftrightarrow\; B \asymp C.$

Ненулевой объект $A \in \mathcal{A}$ назовём полустабильным, если включение $0 \neq B \subset A$ влечёт неравенство $B \preceq A$.

Далее, в работе [15] была доказана

Теорема 2.2. *1. Если объекты A, B полустабильны и $A \prec B$, то* $\operatorname{Hom}(B,A)=0$.

2. Предположим, что категория $\mathcal{A}$ слабо-артинова[3] *и слабо-нётерова*[4]*, тогда для каждого объекта $X \in \mathcal{A}$ существует единственная фильтрация Гардера – Нарасимхана*

$$\begin{tikzcd} X = F^0X \arrow[d] & F^1X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^2X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, hook'] & F^nX \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^{n+1}X = 0 \arrow[l, hook'] \\ G_1 & G_2 & G_3 & & G_n & \end{tikzcd}$$

с полустабильными факторами G_i, удовлетворяющими условию $G_i \prec G_j$ при $i<j$.

Таким образом, имея предпорядок на абелевой категории, удовлетворяющий свойству качелей и некоторым условиям обрыва цепочек, мы получаем выделенный класс полустабильных объектов и каноническую фильтрацию Гардера – Нарасимхана для каждого объекта категории. В частности, классическое понятие стабильности, изначально имевшее смысл только для пучков без кручения, удаётся таким образом распространить на всю категорию когерентных пучков. Для этого достаточно только надлежащим образом упорядочить объекты. Традиционным способом задания порядка на категории является введение на ней векторного наклона. Предлагаемое ниже определение наклона обобщающает понятие центрального заряда, введённого Бриджлендом в [6].

Определение 2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $K_0(\mathcal{A})$ — её группа Гротендика. Линейно независимая система аддитивных функций $(x_0,\dots,x_r) : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ на называется положительной, если для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} & x_0(A) \geqslant 0, \\ & x_0(A)=0 \Rightarrow x_1(A) \geqslant 0, \\ & x_0(A)=x_1(A)=0 \Rightarrow x_2(A) \geqslant 0, \\ & \dots \\ & x_0(A)=\dots=x_{r-1}(A)=0 \Rightarrow x_r(A)>0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если к тому же $x_0(A)=\dots=x_r(A)=0 \Rightarrow A=0$, то положительная система называется исчерпывающей. Наклоном $\gamma(A)$ объекта A относительно (не обязательно исчерпывающей) положительной системы $(x_0,\dots,x_r)$ называется вектор

$$\gamma(A) = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{s}, \nu\left(-\frac{x_{s+1}(A)}{x_s(A)}\right), \nu\left(-\frac{x_{s+2}(A)}{x_s(A)}\right), \dots, \nu\left(-\frac{x_r(A)}{x_s(A)}\right) \right),$$

где $s = \min\limits_i \{x_i(A) \neq 0\}$ и $\nu\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$.

Например, пара $(\mathrm{rk}, \deg)$ является положительной исчерпывающей системой аддитивных функций на категории $\mathcal{C}oh\,C$ когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой

[3] слабая артиновость означает обрыв убывающих по включению цепочек объектов, возрастающих относительно заданного предпорядка

[4] слабая нётеровость означает обрыв возрастающих по включению цепочек объектов, монотонных (как возрастающих, так и убывающих) относительно заданного предпорядка

C, а тройка $(\mathrm{rk}, \deg, \chi(\mathcal{O}_S, \cdot))$ — на категории $\mathcal{C}oh\, S$ когерентных пучков на гладкой алгебраической поверхности S с числом Пикара 1.

Наклон задаёт на категории порядок: $A \preceq B \Leftrightarrow \gamma(A) \leqslant \gamma(B)$. Поскольку неравенство между наклонами γ однозначно определяется неравенствами между отношениями аддитивных функций, из которых построены компоненты γ, этот порядок удовлетворяет лемме о качелях (это обычное свойство медианты обыкновенных дробей с положительными знаменателями: $(a+b)/(c+d)$ всегда лежит между a/c и b/d).

Итак, имея наклон из определения 2.3, мы получаем на категории порядок, удовлетворяющий определению 2.1, а стало быть класс полустабильных объектов и каноническую фильтрацию Гардера – Нарасимхана. Поскольку именно это последнее свойство, т. е. наличие фильтрации Гардера – Нарасимхана, и будет в дальнейшем перенесено нами на произвольные триангулированные категории, зафиксируем его здесь в качестве отдельного определения.

Определение 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория и Φ — линейно упорядоченное множество. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ определена подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{A}$, замкнутая относительно расширений. Назовём пару $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ данными стабильности на $\mathcal{A}$, если выполнены следующие свойства:*

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Pi_{\varphi'}, \Pi_{\varphi''}) = 0$ *при* $\varphi' > \varphi''$;

(ii) каждый ненулевой объект $X \in \mathcal{A}$ обладает фильтрацией Гардера – Нарасимхана

$$\begin{tikzcd}
X = F^0X \arrow[d] & F^1X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^2X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, hook'] & F^nX \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^{n+1}X = 0 \arrow[l, hook'] \\
G_1 & G_2 & G_3 & & G_n &
\end{tikzcd}$$

с $G_i = F^iX/F^{i+1}X \in \Pi_{\varphi_i}$ *и* $\varphi_i < \varphi_j$ *при* $i < j$.

Как мы только что видели, требование существования фильтрации Гардера – Нарасимхана является самым слабым в иерархии данных

наклон, заданный отношениями аддитивных функций

$\Downarrow$

порядок, удовлетворяющий лемме о качелях

$\Downarrow$

набор полустабильных подкатегорий и фильтрации Гардера – Нарасимхана

и было бы интересно понять те степени произвола, с которыми верхние этажи этой иерархии восстанавливаются по нижним.

3. Определение t-стабильности и базисные примеры

Фильтрация объекта абелевой категории представляет собой последовательность подобъектов и факторобъектов, организованных в согласованные точные тройки. Аналогом точных троек в триангулированной категории служат отмеченные треугольники, а обобщением фильтрованного объекта является башня Постникова

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X = F^0X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll, "p_1"'] \arrow[ur, "q_1"] & & F^2X \arrow[ll, "p_2"'] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "q_n"] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll, "p_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

состоящая из отмеченных треугольников

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_i} \arrow[dr, dashed] & \\
F^iX \arrow[ur, "q"] & & F^{i+1}X \arrow[ll, "p"']
\end{tikzcd} .$$

Мы будем называть такую систему отмеченных треугольников *t-фильтрацией* объекта X, а объекты F^iX и X_i будем именовать, соответственно, членами и факторами t-фильтрации. Часто нам будет нужна информация не о всей t-фильтрации объекта, а только о её факторах. В этом случае мы будем использовать запись $X \rightsquigarrow (X_0, X_1, \ldots, X_n)$, имея в виду существование некоторой t-фильтрации объекта X, упорядоченный набор факторов которой совпадает с $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Теперь мы готовы сформулировать основное определение.

Определение 3.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, Φ — линейно упорядоченное множество. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ задана строго полная, замкнутая относительно расширений*[5] *непустая подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{T}$. Пара $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ называется данными стабильности (или просто t-стабильностью), если*

1) *функтор сдвига градуировки $X \mapsto X[1]$ действует на множестве Φ неубывающим автоморфизмом, т. е. $\exists\, \tau \in \operatorname{Aut}\Phi : \Pi_\varphi[1] = \Pi_{\tau(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geqslant \varphi\ \forall \varphi$;*

2) $\forall\, \psi > \varphi \in \Phi \quad \operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_\psi, \Pi_\varphi) = 0$;

3) *любой ненулевой объект $X \in \mathcal{T}$ обладает конечной t-фильтрацией со строго возрастающими полустабильными факторами, т. е. вписывается в башню Постникова*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X = F^0X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll, "p_1"'] \arrow[ur, "q_1"] & & F^2X \arrow[ll, "p_2"'] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "q_n"] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll, "p_{n+1}"']
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

с ненулевыми $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$ и $\varphi_i < \varphi_{i+1}$.

Мы будем называть t-фильтрацию (3.1) *фильтрацией Гардера – Нарасимхана* (или, короче, *HN-фильтрацией*) объекта X, её факторы X_{φ_i} — Φ-полустабильными факторами, а подкатегории Π_φ — полустабильными подкатегориями наклона φ. Довольно часто мы будем обозначать данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ просто через Φ.

[5] Замкнутость подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ относительно расширений означает, что в любом отмеченном треугольнике $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$ с объектами A и C из $\mathcal{A}$, объект B также принадлежит $\mathcal{A}$.

3.1. t-фильтрации, ассоциированные t-структурами

Простейшим частным случаем t-фильтраций являются t-структуры. Напомним (см. в [8]), что t-структурой на триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется пара $\left(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}\right)$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $D^{\leqslant 0} \subset D^{\leqslant 0}[-1]$ и $D^{\geqslant 0} \supset D^{\geqslant 0}[-1]$;

2) $\operatorname{Hom}^0(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}[-1]) = 0$;

3) $\forall\, X \in \mathcal{T}$ существует отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd} & X_{\geqslant 1} \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[ur, "q"] & & X_{\leqslant 0} \arrow[ll, "p"] \end{tikzcd},$$

где $X_{\geqslant 1} \in D^{\geqslant 0}[-1]$ и $X_{\leqslant 0} \in D^{\leqslant 0}$.

Если, наряду с уже перечисленными, выполняется дополнительное условие:

4) $\forall\, X \in \mathcal{T}\ \ \exists\, m, n \in \mathbb{Z}$, такие что $X \in D^{\geqslant 0}[-m] \cap D^{\leqslant 0}[-n]$.

то t-структура называется ограниченной (см. [6]). Как обычно, мы полагаем

$$D^{\leqslant n} = D^{\leqslant 0}[-n] \qquad \text{и} \qquad D^{\geqslant n} = D^{\geqslant 0}[-n]\ .$$

Полная подкатегория $\mathcal{A}[i] = D^{\leqslant 0} \cap D^{\geqslant 0}$ является абелевой (в частности, замкнута относительно расширений) и называется ядром (или сердцевиной) t-структуры.

Лемма 3.2. *Пусть $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ — ограниченная t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$ и $\Pi_i = \mathcal{A}[i] = D^{\leqslant -i} \cap D^{\geqslant -i}$. Тогда $(\mathbb{Z}, \{\Pi_i\}_{i\in\mathbb{Z}})$ задают t-стабильность на категории $\mathcal{T}$.*

Доказательство Из определения t-структуры вытекает, что $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(D^{\leqslant -p}, D^{\geqslant -q}) = 0$ при $p < q$, поэтому подкатегории Π_i удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_i, \Pi_j) = 0 \qquad \text{при} \quad i > j\ .$$

Функтор сдвига градуировки действует на них очевидным образом. Чтобы построить HN-фильтрацию произвольного ненулевого объекта $X \subset \mathcal{T}$ заметим, что ввиду ограниченности t-структуры существуют такие целые числа $n_+(X) \geqslant n_-(X)$, что

$$\operatorname{Hom}^0(X, D^{\geqslant -n_-(X)}) \neq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(X, D^{\geqslant -n}) = 0 \quad \text{при} \quad n < n_-(X)\ ;$$
$$\operatorname{Hom}^0(D^{\leqslant -n_+(X)}, X) \neq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}^0(D^{\leqslant -k}, X) = 0 \quad \text{при} \quad k > n_+(X)\ .$$

Положим $n_0 = n_-(X)$ и рассмотрим отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[ur] & & Y_0 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

с $X_0 \in D^{\geqslant -n_0}$, $Y_0 \in D^{\leqslant -(n_0+1)}$, который существует по определению t-структуры. Легко видеть, что $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(Y_0, X_0) = 0$ и $X_0 \in D^{\geqslant -n_0} \cap D^{\leqslant -n_0} = \Pi_{n_0}$ отличен от нуля, так что мы можем взять Y_0 в качестве первого члена HN-фильтрации. Далее построение производится очевидной индукцией. ∎

Отметим, что лемма 3.2 указывает способ продолжения произвольных данных стабильности на абелевой сердцевине $\mathcal{A}$ (в смысле определения 2.4) на всю триангулированную категорию $\mathcal{T}$. А именно, имеет место

Предложение 3.3. *Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория с ограниченной t-структурой $(D^{\geqslant 0}, D^{\leqslant 0})$, на сердцевине которой $\mathcal{A} = D^{\geqslant 0} \cap D^{\leqslant 0}$ заданы данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ из определения 2.4. Рассмотрим лексикографически упорядоченное множество $\Psi = \mathbb{Z} \times \Phi$ и положим $P_{(i,\varphi)} = \Pi_\varphi[i]$. Тогда $\left(\Psi, \{P_{(i,\varphi)}\}_{(i,\varphi)\in\Psi}\right)$ с очевидным действием сдвига задают t-стабильность на категории $\mathcal{T}$.*

Доказательство. Единственным нетривиальным моментом в доказательстве является построение конечной HN-фильтрации у каждого ненулевого объекта. Существование такой фильтрации следует из определения 2.4, предыдущей леммы 3.2 и простого технического предложения 4.3, которое мы докажем в следующем параграфе. ∎

Следствие 3.4. *Всякие данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ на абелевой категории $\mathcal{A}$ (в смысле определения 2.4) индуцируют t-стабильность $\left(\mathbb{Z} \times \Phi, \{\Pi_\varphi[i]\}_{(i,\varphi)\in\mathbb{Z}\times\Phi}\right)$ на ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$.*

В частности, стабильность по Гизекеру, изначально определявшуюся для когерентных пучков без кручения на проективном многообразии X при помощи наклона $\gamma(F) = \xi_F / r(F)$, где $r(F)$ и χ_F суть ранг и полином Гильберта[6] может быть канонически продолжена до t-стабильности на ограниченной производной категории когерентных пучков $D^b(\mathcal{C}oh\, X)$. Для этого сначала надо распространить гизекеровскую стабильность до данных стабильности на $\mathcal{C}oh\, X$ в смысле определения 2.4 (это было сделано в работе [15]), а потом применить предыдущее следствие. В § 7 мы детально исследуем это продолжение в случае, когда X — гладкая кривая.

3.2. Исключительная t-стабильность

Пусть $\mathcal{T}$ — линейная триангулированная категория, в которой $\bigoplus\limits_\nu \mathrm{Hom}^\nu(X, Y)$ является конечномерным векторным пространством для любой пары объектов X, Y. Напомним, что объект $E \in \mathcal{T}$ называется исключительным, если $\mathrm{Hom}^\bullet(E, E)$ — одномерная алгебра, порождённая тождественным преобразованием. Упорядоченный набор $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ исключительных объектов называется полуортогональным (или исключительным), если $\mathrm{Hom}^\bullet(E_j, E_i) = 0$ при $i < j$. Говорят, что категория $\mathcal{T}$ порождается таким набором, если наименьшая замкнутая относительно прямых сумм полная триангулированная подкатегория, содержащая все E_i совпадает с $\mathcal{T}$. Например, ограниченная производная категория $D^b(\mathcal{C}oh\, \mathbb{P}^n)$ порождена исключительным набором из $(n+1)$ обратимых пучков $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1), \dots, \mathcal{O}(k+n))$, где $k \in \mathbb{Z}$ произвольно.

[6]рассматриваемый как лексикографически упорядоченная по убыванию степени последовательность коэффициентов

В линейной триангулированной категории для всякого объекта $X \in \mathcal{T}$ и градуированного векторного пространства $V^\bullet$ определено произведение $V^\bullet \otimes X$, которое представляет функтор $Y \longmapsto V^\bullet \otimes \operatorname{Hom}^\bullet(Y, X)$ и изоморфно прямой сумме $\bigoplus\limits_{\nu} V^\nu \otimes X[-\nu]$. В линейных триангулированных категориях, порождённых исключительными наборами имеется следующее ортогональное разложение, обобщающее теорему Бейлинсона (см. [11]).

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{T}$ — линейная триангулированная категория, порождённая исключительным набором $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$. Тогда для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует функториальная по X башня Постникова*

$$\begin{tikzcd}
& V_0^\bullet \otimes E_0 \arrow[dr, dashed] & & V_1^\bullet \otimes E_1 \arrow[dr, dashed] & & & & V_n^\bullet \otimes E_n \arrow[dr, dashed] & \\
X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2X \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}\ .$$

В предположениях теоремы 3.5 обозначим символом Υ_i строго полную замкнутую относительно расширений подкатегорию в $\mathcal{T}$, порождённую всеми объектами $E_i[m]$ с $m \in \mathbb{Z}$. Так как набор $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$ исключителен, подкатегории Υ_i удовлетворяют свойству $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(\Upsilon_j, \Upsilon_i) = 0$ при $j > i$. Функтор сдвига градуировки переводит каждую из них в себя. Наконец, теорема 3.5 говорит, что у каждого объекта имеется конечная HN-фильтрация с факторами из Υ_i. Мы получаем

Предложение 3.6. *Пусть $\mathcal{T}$ — линейная триангулированная категория, порождённая исключительным набором $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$. Тогда $(\Delta, \{\Upsilon_i\}_{i \in \Delta})$ (со стандартным порядком на множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$) задают t-стабильность на $\mathcal{T}$.*

Отметим, что в этом примере HN-фильтрация объекта X функториальна по X. В следующем параграфе мы исследуем свойства HN-фильтрации для произвольной t-стабильности и, в частности, докажем её единственность.

4. Свойства t-фильтраций

Зафиксируем данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ на триангулированной категории $\mathcal{T}$.

Теорема 4.1. *HN-фильтрация объекта $X \in \mathcal{T}$ определена однозначно с точностью до единственного изоморфизма башен Постникова.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{tikzcd}
& X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X = F^0X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll, "p_1"] \arrow[ur, "q_1"] & & F^2X \arrow[ll, "p_2"] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "q_n"] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll, "p_{n+1}"]
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

и

$$\begin{tikzcd}
& X_{\psi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\psi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\psi_m} \arrow[dr, dashed] & \\
X = Q^0X \arrow[ur, "q'_0"] & & Q^1X \arrow[ll, "p'_1"] \arrow[ur, "q'_1"] & & Q^2X \arrow[ll, "p'_2"] & \cdots \arrow[l] & Q^mX \arrow[l] \arrow[ur, "q'_m"] & & Q^{m+1}X = 0 \arrow[ll, "p'_{m+1}"]
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

две системы Гардера – Нарасимхана объекта $X \in \mathcal{T}$. Покажем, что $n = m$, $\varphi_i = \psi_i \ \forall i$, и тождественное отображение $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X)$ индуцирует единственный изоморфизм t-фильтраций:

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\cong"] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\cong"] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\cong"] & \\
X \arrow[ur, "q_0"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}_X"', "\cong"] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dd, "\cong"] & & F^2X \arrow[ll] \arrow[dd, "\cong"] & \cdots & F^nX \arrow[ur, "q_n"] \arrow[dd, "\cong"] & & F^{n+1}X \arrow[ll] \arrow[dd, "\cong"] \\
 & X_{\psi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\psi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\psi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X \arrow[ur, "q'_0"] & & Q^1X \arrow[ll] \arrow[ur, "q'_1"] & & Q^2X \arrow[ll] & \cdots & Q^nX \arrow[ur, "q'_n"] & & Q^{n+1}X \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

Для этого нам понадобятся следующее свойство HN-фильтрации.

Предложение 4.2. *Пусть дана HN-фильтрация для X:*

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X = F^0X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2X \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd} .
$$

Тогда

1) $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(X, \Pi_\varphi) = 0$ *при* $\varphi < \varphi_0$,

2) $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(F^iX, \Pi_\varphi) = 0$ *при* $\varphi \leqslant \varphi_i$,

3) $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_\psi, X) = 0$ *при* $\psi > \varphi_n$;

4) *если*

$$
\begin{tikzcd}
 & Y_{\psi_0} \arrow[dr, dashed] & & Y_{\psi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & Y_{\psi_m} \arrow[dr, dashed] & \\
Y = F^0Y \arrow[ur] & & F^1Y \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2Y \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^mY \arrow[l] \arrow[ur] & & F^{m+1}Y = 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

тоже HN-фильтрация для объекта Y, причём $\varphi_n < \psi_0$, то $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(Y, X) = 0$.

Доказательство предложения легко получается применением функторов $\mathrm{Hom}(\cdot, \Pi_\varphi)$, $\mathrm{Hom}(\Pi_\psi, \cdot)$ и $\mathrm{Hom}(Y, \cdot)$ к каждому из отмеченных треугольников

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_i} \arrow[dr, dashed] & \\
F^iX \arrow[ur] & & F^{i+1}X \arrow[ll]
\end{tikzcd} .
$$

Напомнив, что $F^nX \in \Pi_{\varphi_n}$, мы оставляем дальнейшие детали читателю. ■

Возвращаясь к доказательству теоремы, рассмотрим первый треугольник HN-фильтрации (4.1) для X и произвольный $Y \in \Pi_{\varphi_0}$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, Y)$ к треугольнику, получаем

$$
\mathrm{Hom}^{-1}(F^1X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_0}, Y) \xrightarrow{h_Y} \mathrm{Hom}^0(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^0(F^1X, Y) .
$$

Из предложения 4.2 (2) следует, что самый левый и самый правый члены точной последовательности равны нулю. Поэтому

$$\operatorname{Hom}^0(X_{\varphi_0}, Y) \cong \operatorname{Hom}^0(X, Y) \quad \forall\, Y \in \Pi_{\varphi_0}. \tag{4.3}$$

Иначе говоря, объект X_{φ_0} представляет функтор $\operatorname{Hom}^0(X, \cdot) : \Pi_{\varphi_0} \longrightarrow \mathcal{V}ect$.

Подставим X_{φ_0} вместо Y в (4.3) и обозначим морфизм $h_{X_{\varphi_0}}(\mathrm{Id}_{X_{\varphi_0}}) \in \operatorname{Hom}^0(X, X_{\varphi_0})$ через q_0. Обычным путём (см., например, [8, лемма IV.4.5]) можно показать, что отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd} & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll] \end{tikzcd},$$

с $X_{\varphi_0} \in \Pi_{\varphi_0}$ и $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) = 0$ определён однозначно с точностью до единственного изоморфизма треугольников.

Заметим, что $q_0 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{Hom}^0(X, \Pi_{\varphi_0}) \neq 0$. Аналогично, начиная с первого треугольника HN-фильтрации (4.2), мы получим $\operatorname{Hom}^0(X, X_{\psi_0}) \neq 0$. Применяя теперь предложение 4.2 (1) к X, Π_{φ_0} и Π_{ψ_0}, мы заключаем, что $\varphi_0 = \psi_0$. Более того, как следует из единственности объекта, представляющего функтор, тождественное отображение $\mathrm{Id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X)$ продолжается до единственного изоморфизма треугольников:

$$\begin{tikzcd} X_{\varphi_0} \arrow[rrr, "\sim", "\exists!"'] \arrow[dd, dashed] & & & X_{\psi_0} \arrow[dd, dashed] \\ & X \arrow[ul, "q_0"] \arrow[r, "\sim", "\mathrm{Id}_X"'] & X \arrow[ur, "q_0'"'] & \\ F^1X \arrow[ur] \arrow[rrr, "\sim", "\exists!"'] & & & Q^1X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Окончание доказательства теоремы получается по индукции. ■

В дальнейшем нам понадобится также следующий простой технический результат о склейке произвольных (не обязательно связанных с t-стабильностю) башен Постникова, на который мы уже ссылались в доказательстве предложения 3.3.

Предложение 4.3. *1) Пусть X обладает t-фильтрацией $X \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ и каждый Y_s, в свою очередь, тоже имеет t-фильтрацию $Y_s \rightsquigarrow (X_{(s,0)}, \ldots, X_{(s,k_s)})$ $\forall\, s$. Тогда можно построить комбинированную t-фильтрацию*

$$X \rightsquigarrow (X_{(0,0)}, \ldots, X_{(0,k_0)}, X_{(1,0)}, \ldots, X_{(1,k_1)}, \ldots, X_{(n,0)}, \ldots, X_{(n,k_n)}).$$

2) Пусть

$$X \rightsquigarrow (X_{(0,0)}, \ldots, X_{(0,k_0)}, X_{(1,0)}, \ldots, X_{(1,k_1)}, \ldots, X_{(n,0)}, \ldots, X_{(n,k_n)})$$

является t-фильтрацией. Тогда существуют t-фильтрации $X \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ и $Y_s \rightsquigarrow (X_{(s,0)}, \ldots, X_{(s,k_s)})$ для каждого s.

3) Пусть $X \rightsquigarrow (X_0, X_1, \dots, X_n)$ и $Y \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$ — t-фильтрации. Тогда для любой тасующей подстановки факторов, т. е. линейного порядка на множестве

$$\{Z_s\}_{s=0,\dots,n+m+1} = \{X_i\}_{i=0,1\dots,n} \bigsqcup \{Y_j\}_{j=0,\dots,m},$$

сохраняющего начальный порядок на множествах $\{X_i\}_{i=0,1\dots,n}$ и $\{Y_j\}_{j=0,\dots,m}$, существует t-фильтрация $X \oplus Y \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+m+1})$.

Доказательство. Начнём со второго утверждения. Пусть t-фильтрация для X в утверждении задаётся последовательностью отмеченных треугольников:

$$\begin{tikzcd} & X_{(i,j)} \arrow[dr, dashed] & \\ F^{(i,j)}X \arrow[ur] & & F^{(i,j+1)}X \arrow[ll, "p_{(i,j+1)}"] \end{tikzcd}, \qquad \text{где } i = 0, \dots, n;\ j = 0, \dots, k_i - 1; \text{ и}$$

$$\begin{tikzcd} & X_{(i,k_i)} \arrow[dr, dashed] & \\ F^{(i,k_i)}X \arrow[ur] & & F^{(i+1,0)}X \arrow[ll, "p_{(i+1,0)}"] \end{tikzcd}, \qquad \text{где } i = 0, \dots, n;$$

$F^{(0,0)}X = X$; и $F^{(n+1,0)}X = 0$.

Обозначим композицию $p_{(i+1,0)}p_{(i,k_i)} \cdots p_{(i,1)} : F^{(i+1,0)}X \longrightarrow F^{(i,0)}X$ через p_i. В этих обозначениях мы получаем новую t-фильтрацию для X, состоящую из треугольников:

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dr, dashed] & \\ F^{(i,0)}X \arrow[ur] & & F^{(i+1,0)}X \arrow[ll, "p_i"] \end{tikzcd}.$$

Таким образом, нам остаётся показать, что для любого индекса $i = 0, \dots, n$ существует t-фильтрация

$$Y_i \rightsquigarrow (X_{(i,0)}, \dots, X_{(i,k_i)}).$$

Очевидно, возникает t-фильтрация

$$F^{(i,0)}X \rightsquigarrow (X_{(i,0)}, \dots, X_{(i,k_i)}, X_{(i+1,0)}, \dots, X_{(n,k_n)})$$

и утверждение следует из леммы:

Лемма 4.4. *Пусть дана t-фильтрация для Z:*

$$\begin{tikzcd} & Z_0 \arrow[dr, dashed] & & Z_1 \arrow[dr, dashed] & & & & Z_m \arrow[dr, dashed] & \\ Z = F^0Z \arrow[ur] & & F^1Z \arrow[ll, "h_1"] \arrow[ur] & & F^2Z \arrow[ll, "h_2"] & \cdots \arrow[l] & F^mZ \arrow[l] \arrow[ur] & & F^{m+1}Z = 0 \arrow[ll, "h_{m+1}"] \end{tikzcd}.$$

Для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant m+1$ обозначим через c_s композицию $c_s = h_s h_{s-1} \cdots h_1 : F^sZ \longrightarrow Z$ и рассмотрим отмеченные треугольники

$$\begin{tikzcd} & Q_s \arrow[dr, dashed] & \\ Z \arrow[ur] & & F^sZ \arrow[ll, "c_s"] \end{tikzcd}.$$

Тогда для каждого s существует t-фильтрация $Q_s \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \ldots, Z_{s-1})$.

Доказательство леммы проводим индукцией по s. При $s = 1$ доказывать нечего. В общем случае рассмотрим диаграмму отмеченных треугольников:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_s & \\
Q_s[-1] \arrow[r] & F^sZ \arrow[u] \arrow[r, "c_s"] & Z . \\
 & F^{s+1}Z \arrow[u, "h_{s+1}"] &
\end{tikzcd}$$

По аксиоме октаэдра, применённой к диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_s \arrow[r] & Q_{s+1} \\
Q_s[-1] \arrow[ur] \arrow[r] & F^sZ \arrow[u] \arrow[r, "c_s"] & Z , \arrow[u] \\
 & F^{s+1}Z \arrow[u, "h_{s+1}"] \arrow[ur, "c_{s+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

получаем отмеченные треугольники:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_{s+1} \arrow[dr, dashed] & \\
Z \arrow[ur] & & F^{s+1}Z \arrow[ll, "c_{s+1}"]
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
 & Q_s \arrow[dr, dashed] & \\
Q_{s+1} \arrow[ur] & & Z_s \arrow[ll]
\end{tikzcd} .$$

По предположению индукции, $Q_s \rightsquigarrow (Z_0, \ldots, Z_{s-1})$. В частности, у нас есть первый отмеченный треугольник t-фильтрации для Q_s

$$\begin{tikzcd}
 & Z_0 \arrow[dr, dashed] & \\
Q_s \arrow[ur] & & F^1Q_s \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

и окончание t-фильтрации $F^1Q_s \rightsquigarrow (Z_1, \ldots, Z_{s-1})$. Далее строим t-фильтрацию $Q_{s+1} \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \ldots, Z_{s-1}, Z_s)$.

Прежде всего применим к диаграмме отмеченных треугольников

$$\begin{tikzcd}
 & Z_0 & \\
Q_{s+1} \arrow[r] & Q_s \arrow[u] \arrow[r] & Z_s[1] \\
 & F^1Q_s \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

аксиому октаэдра:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_0 \arrow[r] & F^1Q_{s+1}[1] \\
Q_{s+1} \arrow[ur] \arrow[r] & Q_s \arrow[u] \arrow[r] & Z_s[1] . \arrow[u] \\
 & F^1Q_s \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Получим первый член t-фильтрации F^1Q_{s+1} и отмеченные треугольники:

$$\begin{tikzcd} & F^1Q_s \arrow[dr, dashed] & \\ F^1Q_{s+1} \arrow[ur] & & Z_s \arrow[ll] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & Z_0 \arrow[dr, dashed] & \\ Q_{s+1} \arrow[ur] & & F^1Q_{s+1} \arrow[ll] \end{tikzcd}.$$

Из первого треугольника по предположению индукции следует, что существует t-фильтрация $F^1Q_{s+1} \rightsquigarrow (Z_1, \ldots, Z_{s-1}, Z_s)$. Значит, второй треугольник можно включить в t-фильтрацию

$$\begin{tikzcd} & Z_0 \arrow[dr, dashed] & & Z_1 \arrow[dr, dashed] & & & & Z_s \arrow[dr, dashed] & \\ Q_{s+1} = F^0Q_{s+1} \arrow[ur] & & F^1Q_{s+1} \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2Q_{s+1} \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^sQ_{s+1} \arrow[l] \arrow[ur] & & F^{s+1}Qs+1 = 0 \arrow[ll] \end{tikzcd}.$$

Это завершает доказательство леммы, а значит и второго утверждения предложения. ■

Первое утверждение предложения доказывается похожими рассуждениями. Для доказательства последнего рассмотрим t-фильтрации:

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, dashed] & & X_1 \arrow[dr, dashed] & & & & X_n \arrow[dr, dashed] & \\ X = F^0X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur, "q_1"] & & F^2X \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "q_n"] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll] \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} & Y_0 \arrow[dr, dashed] & & Y_1 \arrow[dr, dashed] & & & & Y_m \arrow[dr, dashed] & \\ Y = F^0Y \arrow[ur, "p_0"] & & F^1Y \arrow[ll] \arrow[ur, "p_1"] & & F^2Y \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^mY \arrow[l] \arrow[ur, "p_m"] & & F^{m+1}Y = 0 \arrow[ll] \end{tikzcd}.$$

Предположим, что

$$(Z_0, \ldots, Z_{n+m+1}) = (X_0, \ldots, X_{i_1}, Y_0, \ldots, Y_{j_1}, X_{i_1+1}, \ldots,)$$

и построим t-фильтрацию

$$\begin{tikzcd} & Z_0 \arrow[dr, dashed] & & Z_1 \arrow[dr, dashed] & & Z_2 \arrow[dr, dashed] & & \\ X \oplus Y \arrow[ur, "h_0"] & & F^1(X \oplus Y) \arrow[ll] \arrow[ur, "h_1"] & & F^2(X \oplus Y) \arrow[ll] \arrow[ur, "h_2"] & & F^3(X \oplus Y) \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} & h_0 = q_0 \oplus 0, \ \ldots, \ h_{i_1} = q_{i_1} \oplus 0; \\ & F^1(X \oplus Y) = F^1X \oplus Y, \ \ldots, \ F^{i_1}(X \oplus Y) = F^{i_1}X \oplus Y; \\ & h_{i_1+1} = 0 \oplus p_0, \ \ldots, \ h_{i_1+j_1} = 0 \oplus p_{j_1}; \\ & F^{i_1+1}(X \oplus Y) = F^{i_1}X \oplus F^1Y, \ \ldots, \ F^{i_1+j_1}(X \oplus Y) = F^{i_1}X \oplus F^{j_1}Y; \end{aligned}$$

и так далее. ■

Следствие 4.5. *Пусть $X \in \mathcal{T}$ — полустабильный объект наклона φ. Если он разлагается в прямую сумму $X = X^1 \oplus X^2 \oplus \cdots \oplus X^k$, то каждое его прямое слагаемое X^i — тоже полустабильный объект наклона φ.*

Доказательство. Достаточно проверить утверждение для $k = 2$. Рассмотрим ГН-системы прямых слагаемых:

$$X^1 \rightsquigarrow (X^1_{\varphi_0}, X^1_{\varphi_1}, \ldots, X^1_{\varphi_n}), \quad X^2 \rightsquigarrow (X^2_{\psi_0}, X^2_{\psi_1}, \ldots, X^2_{\psi_m}).$$

Согласно предложению 4.3, упорядочивая факторы этих t-фильтраций в соответствии с порядком на Φ, можно построить HN-фильтрацию для X. Заметим, что она будет тривиальной, только если $n = m = 0$ и $\varphi_0 = \psi_0$. С другой стороны, X обладает только тривиальной HN-фильтрацией, поскольку он полустабилен (теорема 4.1). ∎

5. Связь между t-стабильностями и t-структурами

Как было показано в параграфе 3, ограниченная t-структура на триангулированной категории индуцирует данные стабильности (лемма 3.2). С другой стороны, любая t-стабильность определяет набор t-структур. Перед формулировкой более точного утверждения введём полезное обозначение.

Для подмножества S объектов триангулированной категории $\mathcal{T}$ обозначим через $\langle S\rangle$ наименьшую строго полную замкнутую относительно расширений подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую все объекты из S. Заметим, что если $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ — данные стабильности на $\mathcal{T}$ и $\Psi \subset \Phi$, то $\langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \Psi\rangle$ состоит из тех и только тех объектов, которые обладают HN-фильтрацией $X \rightsquigarrow (X_{\psi_0}, \ldots, X_{\psi_k})$ с $\psi_i \in \Psi$.

Лемма 5.1. *Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ задают t-стабильность на триангулированной категории $\mathcal{T}$. Предположим, что существует разложение множества Φ на две непересекающиеся части: $\Phi = \Phi_- \sqcup \Phi_+$, удовлетворяющее условию: для любых $\varphi_- \in \Phi_-$ и $\varphi_+ \in \Phi_+$ выполнено неравенство $\varphi_- < \varphi_+$. Тогда пара подкатегорий*

$$\mathcal{T}^{\geqslant 0} = \langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \tau(\Phi_-)\rangle\,, \quad \mathcal{T}^{\leqslant 0} = \langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \Phi_+\rangle$$

определяет t-структуру на $\mathcal{T}$ (напомним, что τ — автоморфизм линейно упорядоченного множества Φ, соответствующий сдвигу на $\mathcal{T}$).

Следствие 5.2. *Каждый элемент $\varphi \in \Phi$ задаёт две t-структуры:*

$$\mathcal{A}^{\geqslant 0}_\varphi = \langle \Pi_\psi \mid \psi \leqslant \tau(\varphi)\rangle\ ,\ \mathcal{A}^{\leqslant 0}_\varphi = \langle \Pi_\psi |\ \psi > \varphi\rangle\,;$$
$$\mathcal{B}^{\geqslant 0}_\varphi = \langle \Pi_\psi |\ \psi < \tau(\varphi)\rangle\ ,\ \mathcal{B}^{\leqslant 0}_\varphi = \langle \Pi_\psi |\ \psi \geqslant \varphi\rangle\,.$$

Доказательство леммы. Прежде всего напомним, что по определению t-стабильности $\Pi_\varphi[-1] = \Pi_{\tau^{-1}(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geqslant \varphi$, откуда вытекает первая аксиома t-структуры:

$$\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}[-1] \quad \text{и} \quad \mathcal{T}^{\geqslant 0} \supset \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1].$$

Кроме того, $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = 0$ при $\varphi > \psi$, что влечёт ортогональность

$$\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1]) = 0\ .$$

Для проверки последней аксиомы рассмотрим HN-фильтрацию объекта $0 \neq X \in \mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr, dashed] & \\
X = F^0X \arrow[ur, "q_0"] & & F^1X \arrow[ll, "p_1"] \arrow[ur, "q_1"] & & F^2X \arrow[ll, "p_2"] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "q_n"] & & F^{n+1}X = 0 \arrow[ll, "p_{n+1}"]
\end{tikzcd}.$$

Если $\varphi_n \in \Phi_-$ или $\varphi_0 \in \Phi_+$, то отмеченный треугольник из аксиомы тривиален. Предположим, существует такой номер k, что $\varphi_k \in \Phi_-$ и $\varphi_{k+1} \in \Phi_+$. Дополняя морфизм $X_{\leqslant 0} = F^{k+1}X \xrightarrow{p_{k+1}p_k \cdots p_1} X$ конусом $X_{\geqslant 1}$, мы получаем отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\geqslant 1} \arrow[dr, dashed] & \\
X \arrow[ur] & & X_{\leqslant 0} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

с $X_{\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$ и $X_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ (см. предложение 4.3), что и требуется в последней аксиоме. ■

Отметим, что построенная только что t-структура ограничена тогда и только тогда, когда

$$\Phi = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \tau^{-n}(\Phi_+) \right) \quad \text{и} \quad \Phi = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \tau^{n}(\Phi_-) \right).$$

Заметим также, что одна и та же t-структура может быть индуцирована разными данными стабильности.

Определение 5.3. *Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ и $(\Psi, \{P_\psi\}_{\psi \in \Psi})$ — две t-стабильности на триангулированной категории $\mathcal{T}$, на наклонах которых сдвиг градуировки действует автоморфизмами τ_Φ и τ_Ψ. Скажем, что Φ тоньше, чем Ψ (а Ψ грубее Φ) и обозначим это как $\Phi \preceq \Psi$, если существует сюръекция $r : \Phi \longrightarrow \Psi$, такая, что*

1) $r\tau_\Phi = \tau_\Psi r$;

2) $\varphi' > \varphi'' \Leftrightarrow r(\varphi') \geqslant r(\varphi'')$;

3) $\forall\, \psi \in \Psi \quad P_\psi = \big\langle \Pi_\varphi \big|\ \varphi \in r^{-1}(\psi) \big\rangle$.

Иными словами, более грубая t-стабильность получается из более тонкой слиянием некоторых групп последовательно расположенных полустабильных подкатегорий в более крупные подкатегории. Отношение «тоньше–грубее» является отношением частичного порядка на множестве всех t-стабильностей в фиксированной триангулированной категории. Минимальные относительно этого порядка t-стабильности мы будем называть *тончайшими*. Ясно, что тончайшие данные стабильности содержат наиболее полную информацию о t-структурах.

Предложение 5.4. *Пусть триангулированная категория $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующему условию конечности: всякая t-стабильность Ψ может быть измельчена до некоторой тончайшей t-стабильности $\Phi \preceq \Psi$ (зависящей от Ψ). Тогда для любой ограниченной t-*

структуры $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ *найдётся такая t-стабильность* $\Phi = (\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ *и разбиение* $\Phi = \Phi_- \sqcup \Phi_+$ *на две непересекающиеся части, что*

$$\mathcal{T}^{\leqslant 0} = \langle \Pi_\varphi | \ \varphi \in \Phi_+ \rangle, \qquad \mathcal{T}^{\geqslant 0} = \langle \Pi_\varphi | \ \varphi \in \tau(\Phi_-) \rangle \ ,$$

причём без ограничения общности можно считать, что Φ *является тончайшей t-стабильностью.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 3.2, 5.1. ■

Следующее предложение даёт полезный критерий сравнимости t-стабильностей и простой достаточный признак минимальности.

Предложение 5.5. *1. В условиях определения 5.3* $\Phi \preceq \Psi$*, если и только если выполняются следующие три условия:*

(i) любой Φ*-полустабильный объект является* Ψ*-полустабильным,*

(ii) для $\Pi_{\varphi_i} \subset P_{\psi_i}$ $(i = 1, 2)$ *неравенство* $\varphi_1 < \varphi_2$ *влечёт* $\psi_1 \leqslant \psi_2$*,*

(iii) если $\Pi_\varphi \subset P_\psi$*, то* $\Pi_{\tau_\Phi(\varphi)} \subset P_{\tau_\Psi(\psi)}$*.*

2. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ *выполнено условие:*

$$\forall X, Y \in \Pi_\varphi \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X) \neq 0.$$

Тогда t-стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}, \tau_\Phi)$ *является тончайшей.*

Доказательство. Неравенство $\Phi \preceq \Psi$ влечёт условия (i)–(iii) непосредственно из определений. Для доказательства обратной импликации достаточно показать, что каждая полустабильная подкатегория P_ψ порождена некоторым набором подкатегорий Π_φ. Иначе говоря, если $X_\psi \in P_\psi$ обладает HN-фильтрацией $X_\psi \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \dots, X_{\varphi_n})$ относительно t-стабильности Φ, то $\Pi_{\varphi_i} \subset P_\psi$ для каждого i.

По условию (i) любой объект X_{φ_i} Ψ-полустабилен. Следовательно, мы можем найти такой $\psi_i \in \Psi$, что $X_{\varphi_i} \in P_{\psi_i}$. Так как $\mathrm{Hom}^0(X_\psi, X_{\varphi_0}) \neq 0$ и $X_{\varphi_0} \in P_{\psi_0}$, получаем $\psi \leqslant \psi_0$ (предложение 4.2). С другой стороны, $\mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_n}, X_\psi) \neq 0$, значит, $\psi_n \leqslant \psi$. Кроме того, $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n$, поэтому (условие (ii)) $\psi_0 \leqslant \psi_1 \leqslant \dots \leqslant \psi_n$. Такое возможно только если $\psi_0 = \psi_n$.

Для проверки второго признака заметим, что если данные $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ не являются тончайшими, то существует некоторый элемент $\varphi \in \Phi$ и непустые подкатегории Π_-, Π_+, такие что $\Pi_\varphi = \langle \Pi_-, \Pi_+ \rangle$ и $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_+, \Pi_-) = 0$. Это противоречит предположениям признака. ■

Замечание. Как мы увидим позже, пара t-стабильностей может удовлетворять условию (i), но быть несравнимой, так что остальные условия тоже существенны.

6. Данные стабильности на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}^1)$

Здесь мы изучаем данные t-стабильности и ограниченные t-структуры на производной категории $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ когерентных пучков на проективной прямой, при этом мы будем отождествлять пучки на $\mathbb{P}_1$ с 0-комплексами из $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$. Сначала мы опишем два типа тончайших t-стабильностей на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$: стандартные и исключительные. Затем покажем, что любая t-стабильность получается из них огрублением. Это позволит нам классифицировать все ограниченные t-структуры на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$.

6.1. Стандартные тончайшие стабильности

Стандартные тончайшие данные стабильности $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}})$ в $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ получаются утоньшением t-стабильности $(\mathbb{Z}, \{(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)[i]\}_{i\in\mathbb{Z}})$, индуцированной стандартными мамфордовскими данными стабильности на абелевой категории $\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1$ в соответствии со следствием 3.4. Для построения такого утоньшения напомним, что каждый пучок F на $\mathbb{P}_1$ раскладывается в конечную прямую сумму

$$F = \Big(\mathop{\oplus}_j \Xi_{x_j}\Big) \oplus \Big(\mathop{\oplus}_i \mathcal{O}(n_i)\Big)\ ,$$

где Ξ_{x_j} — пучок кручения, сосредоточенный в точке x_j, а $\mathcal{O}(n_i)$ — линейное расслоение степени n_i. Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\sqcup\mathbb{P}_1)$ и для каждого $\mu\in\mathcal{M}$ (т. е. $\mu=(i,x)$ или $\mu=(i,n)$, где $i,n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{P}_1$) определим полустабильную категорию Π_μ следующим образом:

$$\Pi_{(i,x)} = \langle \mathcal{O}_x[i]\rangle \quad \text{и} \quad \Pi_{(j,n)} = \langle \mathcal{O}(n)[j]\rangle\ , \tag{6.1}$$

Для того, чтобы выполнялись условия ортогональности $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi_\mu,\Pi_\nu) = 0$ при $\mu>\nu$, порядок на множестве наклонов $\mathcal{M}$ должен удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}
&(i,\alpha) > (j,\beta) &&\text{при } i>j,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}\sqcup\mathbb{P}_1;\\
&(i,n) > (i,m) &&\text{при } n>m\in\mathbb{Z},\ i\in\mathbb{Z};\\
&(i,x) > (i,n) &&\text{при } x\in\mathbb{P}_1,\ i,\ n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

которые линейно упорядочивают все элементы $\mathcal{M}$ кроме пар вида $\big((i,x),\,(i,y)\big)$. И поскольку $\mathrm{Hom}^q(\mathcal{O}_x[i],\mathcal{O}_y[j]) = 0$ для всех $i,\ j,\ q\in\mathbb{Z}$ при $x\neq y$, линейный порядок на пучках кручения может быть задан произвольно.

Полученный набор полустабильных категорий Π_μ является тончайшим, поскольку все они удовлетворяют достаточному условию из предложения 5.5 (2), т. е. между любыми двумя объектами в каждой из категорий есть ненулевой морфизм. Существование конечной HN-фильтрации у произвольного ненулевого объекта вытекает из предложения 4.3 и того, что $\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1[i] = \big\langle \Pi_{(i,\alpha)} \,|\, \alpha\in\mathbb{Z}\sqcup\mathbb{P}_1\big\rangle$.

Подчеркнём, что построенная t-стабильность $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}})$ зависит от произвола в выборе порядка на пучках кручения, т. е. на $\mathbb{P}_1$-компоненте наклона, так что мы получаем целую бесконечную серию тончайших попарно несравнимых между собой t-стабильностей с одними и теми же набором полустабильных подкатегорий и множеством наклонов. Каждую из них мы будем называть стандартной.

6.2. Тончайшие исключительные t-стабильности

Эти t-стабильности получаются минимальными утоньшениями исключительной t-стабильности $\left(\{0,1\},\{\Pi_i^k\}_{i\in\{0,1\}}\right)$ из предложения 3.6. Напомним, что подкатегории

$$\begin{aligned}\Pi_0^k &= \langle \mathcal{O}(k)[j] \mid j\in\mathbb{Z}\rangle\,,\\ \Pi_1^k &= \langle \mathcal{O}(k+1)[i] \mid i\in\mathbb{Z}\rangle\end{aligned}$$

связаны с ортогональным разложением $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ относительно порождающего её исключительного набора $(\mathcal{O}(k),\,\mathcal{O}(k+1))$ (где k — произвольное фиксированное целое число), и действие функтора сдвига переводит каждую из них в себя.

Для построения минимального измельчения этих данных рассмотрим новые полустабильные подкатегории

$$\Pi_{(i,0)}^k = \langle \mathcal{O}(k)[i]\rangle\ \ ,\quad \Pi_{(i,1)}^k = \langle \mathcal{O}(k+1)[i]\rangle \tag{6.2}$$

с множеством наклонов $\mathcal{E}=\mathbb{Z}\times\{0,1\}$, на котором функтор сдвига действует автоморфизмом $\tau\in\operatorname{Aut}\mathcal{E} : \tau(i,0)=(i+1,0)$, $\tau(i,1)=(i+1,1)$. Эти подкатегории очевидно являются тончайшими (между любыми двумя объектами есть ненулевой морфизм).

Чтобы разложить произвольный ненулевой объект $X\in D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ в башню Постникова с факторами из Π_ε, напомним что структура $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ описывается следующим хорошо известным предложением:

Предложение 6.1. *Если гомологическая размерность абелевой категории $\mathcal{A}$ равна 1, то каждый объект $X\in D^b(\mathcal{A})$ изоморфен конечной прямой сумме i-комплексов:*

$$X=\mathop{\oplus}_i A_i[-i]\ ,$$

где $A_i\in\mathcal{A}$, и через $A[-i]$ мы обозначаем комплекс с единственным ненулевым членом $A\in\mathcal{A}$, стоящим в градуировке i.

Из него вытекает, что всякий объект $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ является прямой суммой сдвинутых по градуировке обратимых пучков и пучков кручения. Таким образом достаточно уметь раскладывать в башню Постникова каждый обратимый пучок $\mathcal{O}(n)$ и и каждый пучок кручения Ξ_x с носителем в точке x. Эти разложения имеют вид

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(k)^{\oplus(n-k-1)}[1] \arrow[dr, dashed] & \\ \mathcal{O}(n) \arrow[ur] & & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(n-k)} \arrow[ll] \end{tikzcd}\quad\text{, если } n>k+1\ , \tag{6.3}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(k)^{\oplus(k-n+1)} \arrow[dr, dashed] & \\ \mathcal{O}(n) \arrow[ur] & & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(k-n)}[-1] \arrow[ll] \end{tikzcd}\quad\text{, если } n<k\ , \tag{6.4}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(k)^{\oplus d}[1] \arrow[dr, dashed] & \\ \Xi_x \arrow[ur] & & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus d} \arrow[ll] \end{tikzcd}\quad\text{, где } d=\deg\Xi_x \tag{6.5}$$

и получаются из канонических точных троек

$$
\begin{array}{ll}
0 \longrightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus(n-k-1)} \longrightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(n-k)} \longrightarrow \mathcal{O}(n) \longrightarrow 0\,, & \text{если } n > k+1\,, \\
0 \longrightarrow \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus(k-n+1)} \longrightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(k-n)} \longrightarrow 0\,, & \text{если } n < k\,, \\
0 \longrightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus d} \longrightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus d} \longrightarrow \Xi_x \longrightarrow 0\,, & \text{где } d = \deg \Xi_x\,.
\end{array}
$$

Выясним теперь, каким может быть линейный порядок на множестве наклонов $\mathcal{E}$. Соотношения ортогональности $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(\Pi^k_{\varepsilon'}, \Pi^k_{\varepsilon''}) = 0$ между полустабильными подкатегориями с наклонами $\varepsilon'' < \varepsilon'$ накладывают $\forall\, i < j$ неравенства $(i,0) < (j,0)$ и $(i,1) < (j,1)$. Далее, башня (6.4) является HN-фильтрацией, только при условии $\mathcal{O}(k) < \mathcal{O}(k+1)[-1]$, откуда $\forall\, i \in \mathbb{Z}$ мы получаем неравенство $(i,0) < (i-1,1)$. Легко видеть, что всякий линейный порядок на $\mathcal{E}$, включающий в себя эти неравенства, задаётся выбором числа $p \in \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ и имеет вид

$$
\begin{array}{ll}
\ldots < (i+p,0) < (i-1,1) < (i+p+1,0) < (i+p,1) < \ldots & ,\ \text{если } p \neq \infty \\
(i-1,0) < (i,0) < (j,1) < (j+1,1) \quad \forall\, i,j & ,\ \text{если } p = \infty
\end{array}
\tag{6.6}
$$

Множество $\mathcal{E}$ с линейным порядком, соответствующим заданному p, мы будем обозначать через $\mathcal{E}_p$.

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ мы имеем тончайшие данные стабильности $\big(\mathcal{E}_p, \{\Pi^k_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p}\big)$, которые мы будем называть *исключительными*. При фиксированном k все они имеют один и тот же набор полустабильных категорий (6.2) и различаются упорядочением (6.6) множества их наклонов.

6.3. Перечисление всех t-стабильностей на $D^b(\mathcal{C}oh\, \mathbb{P}_1)$

В этом разделе мы докажем следующий классифицирующий результат.

Теорема 6.2. *Всякая t-стабильность на $D^b(\mathcal{C}oh\, \mathbb{P}_1)$ является огрублением одной из тончайших t-стабильностей, которые, в свою очередь, исчерпываются стандартными и исключительными t-стабильностями, описанными в двух предыдущих разделах.*

Доказательство. Пусть $(\Phi, \{\Theta_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ — t-стабильность на $D^b(\mathcal{C}oh\, \mathbb{P}_1)$, несравнимая ни с одной из стандартных тончайших t-стабильностей $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}})$. Покажем, что тогда $(\Phi, \{\Theta_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ грубее, чем одна из исключительных t-стабильностей.

Если t-стабильность Φ не является огрублением стандартной тончайшей t-стабильности $\mathcal{M}$, то найдётся $\mathcal{M}$-полустабильный объект X, не являющийся Φ-полустабильным. Не ограничивая общности можно считать, что X порождает одну из стандартных полустабильных подкатегорий Π_μ (иначе все они Φ-полустабильны и тогда Φ — огрубление $\mathcal{M}$). Более того, т. к. сдвиг градуировки переводит полустабильные объекты в полустабильные, мы можем считать, что X равен либо $\mathcal{O}_x$, либо $\mathcal{O}(n)$.

Рассмотрим первый отмеченный треугольник HN-фильтрации объекта X относительно Ψ:

$$
\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi_0} \arrow[dr, dashed] & \\
X \arrow[ur, "\wr"] & & F^1X \arrow[ll]
\end{tikzcd}
\tag{6.7}
$$

Ключевым местом доказательства является

Лемма 6.3. *Пусть* $X \in D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ *— это либо* O_x*, либо* $\mathcal{O}(n)$*. Тогда всякий отмеченный треугольник вида* (6.7) *с* $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) = 0$ *изоморфен одному из треугольников* (6.3)–(6.5) *с подходящим* $k \in \mathbb{Z}$.

Лемму мы докажем ниже, а пока продолжим доказательство теоремы. Ввиду леммы, X_{φ_0} изоморфен $\mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}$ или $\mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[1]$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку (6.7) — это первый треугольник HN-фильтрации, объект X_{φ_0} Ф-полустабилен, и тем самым $\mathcal{O}(k)[i]$ Ф-полустабильны $\forall\, i \in \mathbb{Z}$. Тогда отмеченный треугольник (6.7) имеет вид

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j] \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[ur] & & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_1}[j-1] \arrow[ll] \end{tikzcd}, \tag{6.8}$$

где n_0, $m_1 \in \mathbb{N}$, и $j = 0, 1$.

Покажем, что $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1]$ тоже Ф-полустабилен. Если это не так, то HN-фильтрацию для X можно продолжить дальше:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j] \arrow[dr, dashed] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[ur] & & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1] \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2X \arrow[ll] \end{tikzcd}.$$

Из определения HN-фильтрации и предложения 4.2 следует, что

$$\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(F^2X, X_{\varphi_1}) = 0\ , \tag{6.9}$$

$$\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = 0\ . \tag{6.10}$$

Опять по лемме 6.3 существуют $m \in \mathbb{Z}$ и $n_1, m_2 \in \mathbb{N}$, такие что

$$\text{либо } X_{\varphi_1} = \mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}[j-1]\,, \quad F^2X = \mathcal{O}(m+1)^{\oplus m_2}[j-2]\,, \quad \text{если } k < m-1\,,$$

$$\text{либо } X_{\varphi_1} = \mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}[j]\,, \quad F^2X = \mathcal{O}(m+1)^{\oplus m_2}[j-1]\,, \quad \text{если } k > m\,.$$

В первом случае, когда $k < m-1$,

$$\mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(\mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}) \neq 0\,,$$

что противоречит (6.10). Во втором, когда $k > m$,

$$\mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(\mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}) \neq 0\ ,$$

что также противоречит (6.10). Итак, HN-фильтрация (6.7) не продолжается, и объект $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1]$ Ф-полустабилен, а значит объекты $\mathcal{O}(k+1)[j]$ Ф-полустабильны $\forall\, j \in \mathbb{Z}$.

Поскольку объекты $\mathcal{O}(k)[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)[i]$ Ф-полустабильны $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, измельчая при необходимости Ф, можно считать, что подкатегории $\langle \mathcal{O}(k)[i] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}(k+1)[i] \rangle$ Ф-полустабильны. Покажем, что любой Ф-полустабильный объект Y лежит в одной из них. Для этого разложим Y в прямую сумму сдвинутых по градуировке обратимых пучков и пучков кручения с носителем в одной точке. HN-фильтрация каждого такого слагаемого (относительно Ф) имеет в качестве факторов объекты $\mathcal{O}(k)[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)[i]$ (см. (6.3)–(6.4)). Из предложения 4.3 и единственности HN-фильтрации следует тогда, что HN-фильтрация объекта Y имеет в качестве факторов только $\mathcal{O}(k)^{\oplus a}[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus b}[i]$.

Итак, набор Ф-полустабильных категорий совпадает с набором полустабильных подкатегорий одной из исключительных t-стабильностей. Поскольку действие функтора сдвига на Ф определяется этим однозначно, а любой допустимый порядок на Ф даёт одну из исключительных t-стабильностей, теорема доказана. ■

Доказательство леммы 6.3 начнём с очевидного наблюдения.

Замечание 6.4. *Предположим, что в отмеченном треугольнике* (6.7) $X_{\varphi_0} = X_1 \oplus X_2$ *и* $f = f_1 \oplus f_2$, *где* $f_i \in \operatorname{Hom}(X, X_i)$. *Если* $f_2 = 0$, *то* $F^1X = Y \oplus X_2$ *и* $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) \neq 0$.

Пусть X из треугольника (6.7) — это один из 0-комплексов: $\mathcal{O}_x[0]$ или $\mathcal{O}(n)[0]$. Опираясь на предложение 6.1 и предыдущее замечание, можно считать, что если $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) = 0$, то $X_{\varphi_0} = X_0[0] \oplus X_1[1]$ и $f = f_0 \oplus f_1$ с

$$X_i \in \mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1\ , \quad f_0 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(X, X_0)\ , \quad f_1 \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(X, X_1)\ ,$$

причём $f_i = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$. Объект F^1X изоморфен $C[-1]$, где C — конус морфизма f.

Рассмотрим расширение, соответствующее элементу $f_1 \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(X, X_1)$:

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{-1}} X \longrightarrow 0. \tag{6.11}$$

Объект $X_1[1]$ изоморфен комплексу

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{-1}} X \longrightarrow 0,$$

а морфизм f_1 может быть представлен как морфизм комплексов

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_X"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "d_{-1}"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Тогда и морфизм $f : X \longrightarrow X_0[0] \oplus X_1[1]$ можно представить отображением комплексов:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \oplus f"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "d_{-1} \oplus 0"] & X \oplus X_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Конусом такого морфизма служит комплекс

$$0 \longrightarrow X \oplus E \xrightarrow{\delta_{-1}} X \oplus X_0 \longrightarrow 0,$$

где δ_{-1} задаётся матрицей

$$\delta_{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_X & d_{-1} \\ f_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В производной категории $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ комплекс, представляющий конус, изоморфен прямой сумме $(\operatorname{Ker}\delta_{-1})[1] \oplus (\operatorname{Coker}\delta_{-1})[0]$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму в абелевой категории $\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\delta_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & X \oplus E \arrow[r, "\delta_{-1}"] \arrow[d] & X \oplus X_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\delta_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0\,. \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Получаем, что $\operatorname{Coker}\delta_{-1} = \operatorname{Coker} f_0$ и условие $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) = 0$ означает, что

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}\Big((\operatorname{Ker}\delta_{-1})[0] \oplus (\operatorname{Coker} f_0)[-1],\ X_0[0] \oplus X_1[1]\Big) = 0,$$

откуда, в частности, получаем

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}\Big((\operatorname{Ker}\delta_{-1})[0],\ X_0[0]\Big) = 0, \tag{6.12}$$

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}\Big((\operatorname{Ker}\delta_{-1})[0],\ X_1[1]\Big) = 0. \tag{6.13}$$

Предположим сначала, что $X = \mathcal{O}_x$ и $X_0 \neq 0$. Тогда $\operatorname{Ker} f_0 = 0$, т. е. $\operatorname{Ker}\delta_{-1} = X_1$. Это противоречит условию (6.13). Следовательно, $X_0 = 0$ и треугольник получается из точной последовательности (6.11). В частности, $C[-1]=E$, а условие $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1X, X_{\varphi_0}) = 0$ означает, что $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(E, X_1[1]) = 0$, т. е. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0$ и $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0$. Кроме того, по построению, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(X_1, E) \neq 0$. Теперь доказательство леммы в случае $X = \mathcal{O}_x$ следует из замечания:

Замечание 6.5. *Если пучки E и X_1 на $\mathbb{P}_1$ удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0,\ \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0,\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(X_1, E) \neq 0,$$

то существует такое целое число k и натуральные e, x_1, что $E = e\mathcal{O}(k{+}1)$, $X_1 = x_1\mathcal{O}(k)$.

Доказательство оставляется читателю. ∎

Пусть теперь $X = \mathcal{O}(n)$. Допустим, что ни X_0, ни X_1 ненулевые пучки. Тогда X_1 имеет в качестве прямого слагаемого обратимый пучок L, поскольку в противном случае $f_1 = 0$, т. е. $X_1 = 0$ (см. зам. 6.4). Значит, $\operatorname{Ker}\delta_{-1}$ тоже обладает обратимым прямым слагаемым L' (см. левый столбец диаграммы).

Предполагая, что $\operatorname{Ker} f_0 = 0$, получаем: $\operatorname{Ker}\delta_{-1} = X_1$, что противоречит (6.13). Следовательно, $\operatorname{Ker} f_0 \neq 0$, т. е. $\operatorname{Im} f_0$ — пучок кручения и X_0 тоже имеет ненулевое кручение T. Однако нетривиальность пространства $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1}(L', T)$ противоречит условию (6.12). Итак, в случае $X = \mathcal{O}(n)$ мы получаем:

$$\text{либо } X_1 = 0\ , \qquad \text{либо } X_0 = 0.$$

Если $X_1 = 0$, то треугольник (6.7) получается из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_0 \longrightarrow \mathcal{O}(n) \xrightarrow{f_0} X_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_0 \longrightarrow 0$$

и имеет вид

$$\begin{tikzcd} & X_0[0] \arrow[dr, dashed] & \\ \mathcal{O}(n) \arrow[ur, "f_0"] & & (\operatorname{Ker} f_0)[0] \oplus (\operatorname{Coker} f_0)[-1]\,. \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{6.14}$$

Требование $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$ переписывается как

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}((\operatorname{Ker} f_0)[0], X_0[0]) = 0, \tag{6.15}$$

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}((\operatorname{Coker} f_0)[-1], X_0[0]) = 0. \tag{6.16}$$

Как и выше, предположение $\operatorname{Ker} f_0 \neq 0$ противоречит (6.15). Поэтому $\operatorname{Ker} f_0 = 0$. Далее условие (6.16) и замечание 6.4 влекут, что треугольник (6.14) изоморфен (6.4) для некоторого целого $k > n$.

Предположим, наконец, что $X_0 = 0$. Тогда треугольник (6.7) происходит из точной тройки

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow E \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{O}(n) \longrightarrow 0$$

и имеет вид

$$\begin{tikzcd} & X_1[1] \arrow[dr, dashed] & \\ \mathcal{O}(n) \arrow[ur, "f_1"] & & E \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{6.17}$$

с $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(E, X_1[1]) = 0$. Используя замечание 6.5 в очередной раз, убеждаемся, что треугольник (6.17) изоморфен треугольнику (6.3) для некоторого целого $k < n - 1$. Лемма доказана. ■

6.4. Классификация t-структур на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$

Согласно лемме 5.1, разбивая множество наклонов любой t-стабильности на две непересекающиеся части, мы получаем t-структуру. С другой стороны, в предыдущих подпараграфах мы описали все данные стабильности на категории $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$. Это даёт нам возможность описать все ограниченные t-структуры на ограниченной производной категории когерентных пучков на $\mathbb{P}_1$. Группа $\operatorname{Aut}(D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1))$ автоэквивалентностей категории действует на t-структурах, и мы перечислим только представителей по модулю этого действия. Согласно [4], группа $\operatorname{Aut}(D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1))$ порождена сдвигом градуировки, группой автоморфизмов $\mathbb{P}_1$ и тензорными умножениями на обратимые пучки $\mathcal{O}(n) \in \operatorname{Pic}\mathbb{P}_1$.

Как известно, t-структура $(D^{\geqslant 0}, D^{\leqslant 0})$ однозначно восстанавливается по любой своей половине. Поэтому мы будем указывать обе ее части только в том случае, когда восстановление второй не совсем очевидно.

Первая серия t-структур на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ получается из стандартных данных стабильности $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}})$ (см. 6.1).

Начнём с тавтологической t-структуры производной категории:

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} = \langle (\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)[j]\ , \quad j \geqslant 0 \rangle\ .$$

Её сердцевина[7] — это $\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1$. Проиллюстрируем это на рисунке.

$$\begin{array}{lr} \mathcal{A}^{\geqslant 0} & \mathcal{A}^{\leqslant 0} \end{array}$$
$$\ldots\ \mathcal{O}[-1]\ \ldots \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}(-1)[0]\,\mathcal{O}[0]\,\mathcal{O}(1)[0]\ \ldots\ \mathcal{O}_x[0]\ \ldots}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1[0]}\ldots\ \mathcal{O}(-1)[1]\,\mathcal{O}[1]\ \ldots$$

Следующие три t-структуры определяются с помощью пар кручения. Напомним определения и некоторые результаты соответствующей теории [12, 5].

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Пара полных подкатегорий $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ в $\mathcal{A}$ называется *парой кручения*, если $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) = 0$ и каждый объект $A \in \mathcal{A}$ включается в единственную точную последовательность

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0,$$

где $A_i \in \mathcal{A}_i$. Пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ называется *коопрокидывающей*, если любой объект из $\mathcal{A}$ представляется в виде факторобъекта некоторого объекта из $\mathcal{A}_0$.

Пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ определяет t-структуру на $D^b(\mathcal{A})$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} {}^pD^b(\mathcal{A})^{\leqslant 0} &= \{A \in D^b(\mathcal{A})^{\leqslant 0} |\ H^0(A) \in \mathcal{A}_1\}, \\ {}^pD^b(\mathcal{A})^{\geqslant 0} &= \{A \in D^b(\mathcal{A})^{\geqslant -1} |\ H^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0\}. \end{aligned}$$

По определению, коопрокидыванием ${}^p\mathcal{A}$ категории $\mathcal{A}$ относительно $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ называется сердцевина этой t-структуры. Если пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ является коопрокидывающей, производные категории совпадают: $D({}^p\mathcal{A}) = D(\mathcal{A})$.

На категории $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ мы имеем следующие коопрокидывающие пары кручения и соответствующие t-структуры.

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_0 = \langle \mathcal{O}(n),\ n < 0 \rangle\,, \quad \mathcal{B}_1 = \langle \mathcal{O}(n),\ n \geqslant 0;\ \mathcal{O}_x,\ x \in \mathbb{P}_1 \rangle\,, \\ &\mathcal{B}^{\leqslant 0} = \langle \mathcal{O}(n)[i],\ n \geqslant 0,\ i \geqslant 0;\ \mathcal{O}_x[i],\ x \in \mathbb{P}_1,\ i \geqslant 0;\ \mathcal{O}(n)[j],\ n < 0,\ j \geqslant 1 \rangle\,, \\ &\mathcal{B}^0 = \langle \mathcal{O}(n)[0],\ n \geqslant 0;\ \mathcal{O}_x[0],\ x \in \mathbb{P}_1;\ \mathcal{O}(n)[1],\ n < 0 \rangle\ . \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr} \mathcal{B}^{\geqslant 0} & \mathcal{B}^{\leqslant 0} \end{array}$$
$$\ldots\ \mathcal{O}[-1]\ \ldots \underbrace{\ldots, \mathcal{O}(-1)[0]\,\mathcal{O}[0]\,\mathcal{O}(1)[0]\ \ldots\ \mathcal{O}_x[0]\ \ldots}_{\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1[0]}\ldots\ \mathcal{O}(-1)[1]\,\mathcal{O}[1]\ \ldots$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_0 = \langle \mathcal{O}(n),\ n \in \mathbb{Z} \rangle\,, \quad \mathcal{C}_1 = \langle \mathcal{O}_x,\ x \in \mathbb{P}_1 \rangle\,, \\ &\mathcal{C}^{\leqslant 0} = \langle \mathcal{O}_x[i],\ x \in \mathbb{P}_1,\ i \geqslant 0;\ \mathcal{O}(n)[j]\ n \in \mathbb{Z},\ j \geqslant 1 \rangle\,, \\ &\mathcal{C}^0 = \langle \mathcal{O}_x[0],\ x \in \mathbb{P}_1;\ \mathcal{O}(n)[1],\ n \in \mathbb{Z} \rangle\,. \end{aligned}$$

[7]Здесь и далее мы обозначаем сердцевину t-структуры $(D^{\geqslant 0}, D^{\leqslant 0})$ символом D^0.

$$\mathcal{C}^{\geqslant 0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{C}^{\leqslant 0}$$

$$\ldots\ \mathcal{O}(-1)[0]\,\mathcal{O}[0]\ \ldots \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_x[0]\ \ldots}_{\text{пучки кручения}}\ \ldots\ \mathcal{O}(-1)[1]\,\mathcal{O}[1]\ \ldots \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_x[1]\ \ldots}_{\text{пучки кручения}}\ \ldots$$

Последняя коопркидывающая пара кручения для $\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1$ зависит от выбора произвольного непустого подмножества $P \subset \mathbb{P}_1$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(P)_0 = \langle \mathcal{O}_x,\ x \in P \rangle\,, \quad \mathcal{D}(P)_1 = \langle \mathcal{O}_y,\ y \notin P;\ \mathcal{O}(n),\ n \in \mathbb{Z} \rangle\,,\\
&\mathcal{D}(P)^{\leqslant 0} = \langle \mathcal{O}_x[i],\ x \in P,\ i \geqslant 0;\ X[j],\ X \in \mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1,\ j \geqslant 1 \rangle\,,\\
&\mathcal{D}(P)^0 = \langle \mathcal{O}_x[0],\ x \in P;\ \mathcal{O}_y[1],\ y \notin P;\ \mathcal{O}(n)[1],\ n \in \mathbb{Z} \rangle\,.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}(P)^{\geqslant 0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{D}(P)^{\leqslant 0}$$

$$\ldots \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_y[0]\ \ldots}_{y \in \mathbb{P}_1 \setminus P} \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_x[0]\ \ldots}_{x \in P}\ \ldots\ \mathcal{O}[1]\ \ldots \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_y[1]\ \ldots}_{y \in \mathbb{P}_1 \setminus P} \underbrace{\ldots\ \mathcal{O}_x[1]\ \ldots}_{x \in P}\ \ldots$$

Очевидно, что t-структуры $\mathcal{D}(P) \sim \mathcal{D}(P')$ эквивалентны по модулю действия группы $\operatorname{Aut} D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ тогда и только тогда, когда $P' = \varphi(P)$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}_1$.

Следующая серия t-структур индуцирована исключительными данными стабильности $\left(\mathcal{E}_p, \left\{\Pi^0_\varepsilon\right\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p}\right)$ (см. раздел 6.2), где порядок, как мы уже отмечали, зависит от параметра $p \in \bar{\mathbb{N}}$. Эти t-структуры можно разделить на две группы: ограниченные ($\mathcal{E}(p)$ и $\mathcal{F}(p)$) и неограниченные ($\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{I}$). Они определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(p)^{\leqslant 0} = \langle \mathcal{O}[i],\ i \geqslant p;\ \mathcal{O}(1)[j],\ j \geqslant -2 \rangle\,,\\
&\mathcal{E}(p)^0 = \langle \mathcal{O}(p)[0],\ \mathcal{O}(1)[-2] \rangle\,,
\end{aligned}$$

где p — неотрицательное целое число.

$$\mathcal{E}(p)^{\leqslant 0}$$

$$\ldots\ \mathcal{O}[p-1]\,\mathcal{O}(1)[-2]\,\mathcal{O}[p]\,\mathcal{O}(1)[-1]\,\mathcal{O}[p+1]\,\mathcal{O}(1)[0]\ \ldots$$

$$\mathcal{E}(p)^{\geqslant 0}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(p)^{\leqslant 0} = \langle \mathcal{O}[i],\ i \geqslant p;\ \mathcal{O}(1)[j],\ j \geqslant -1 \rangle\,,\\
&\mathcal{F}(p)^0 = \langle \mathcal{O}(p)[0],\ \mathcal{O}(1)[-1] \rangle\,,
\end{aligned}$$

где p — неотрицательное целое число.

$$\mathcal{F}(p)^{\leqslant 0}$$

$$\ldots\ \mathcal{O}[p-1]\,\mathcal{O}(1)[-2]\,\mathcal{O}[p]\,\mathcal{O}(1)[-1]\,\mathcal{O}[p+1]\,\mathcal{O}(1)[0]\ \ldots$$

$$\mathcal{F}(p)^{\geqslant 0}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\leqslant 0} &= \langle \mathcal{O}[i],\ i \geqslant 0;\ \mathcal{O}(1)[j],\ j \in \mathbb{Z} \rangle\,,\\
\mathcal{G}^{\geqslant 0} &= \langle \mathcal{O}[i],\ i \leqslant 0 \rangle\,,\\
\mathcal{G}^{0} &= \langle \mathcal{O}[0] \rangle\,.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}^{\geqslant 0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{G}^{\leqslant 0}$$

$$\underbrace{\dots\ \mathcal{O}[-1]\,\boxed{\mathcal{O}[0]}\,\mathcal{O}[1]\ \dots}_{\mathcal{O}[j],\ j\in\mathbb{Z}}\ \underbrace{\dots\,\mathcal{O}(1)[-1]\,\mathcal{O}(1)[0]\,\mathcal{O}(1)[1]\ \dots}_{\mathcal{O}(1)[j],\ j\in\mathbb{Z}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\leqslant 0} &= \langle \mathcal{O}(1)[j],\ j \geqslant 0 \rangle\,,\\
\mathcal{H}^{\geqslant 0} &= \langle \mathcal{O}[i],\ i \in \mathbb{Z};\ \mathcal{O}(1)[j]\ ,\ j \leqslant 0 \rangle\,,\\
\mathcal{H}^{0} &= \langle \mathcal{O}(1)[0] \rangle\,.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}^{\geqslant 0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{H}^{\leqslant 0}$$

$$\underbrace{\dots\ \mathcal{O}[-1]\,\mathcal{O}[0]\,\mathcal{O}[1]\ \dots}_{\mathcal{O}[j],\ j\in\mathbb{Z}}\ \underbrace{\dots\,\mathcal{O}(1)[-1]\,\boxed{\mathcal{O}(1)[0]}\,\mathcal{O}(1)[1]\ \dots}_{\mathcal{O}(1)[j],\ j\in\mathbb{Z}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\leqslant 0} &= \langle \mathcal{O}(1)[j],\ j \in \mathbb{Z} \rangle\,,\\
\mathcal{I}^{\geqslant 0} &= \langle \mathcal{O}[i],\ i \in \mathbb{Z} \rangle\,,\\
\mathcal{I}^{0} &= \langle 0 \rangle\,.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}^{\geqslant 0} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{I}^{\leqslant 0}$$

$$\underbrace{\dots\ \mathcal{O}[-1]\,\mathcal{O}[0]\,\mathcal{O}[1]\ \dots}_{\mathcal{O}[j],\ j\in\mathbb{Z}}\ \underbrace{\dots\,\mathcal{O}(1)[-1]\,\mathcal{O}(1)[0]\,\mathcal{O}(1)[1]\ \dots}_{\mathcal{O}(1)[j],\ j\in\mathbb{Z}}$$

Замечание 6.6. *Легко проверить, что сердцевины t-структур, индуцированных исключительными данными стабильности, обладают следующими эквивалентностями:*

- $\mathcal{E}(p)^0\ \forall p \geqslant 0$ *и* $\mathcal{F}(p)^0\ \forall p \geqslant 1$ *эквивалентны прямой сумме категорий векторных пространств* $\mathcal{V}ect \oplus \mathcal{V}ect$*;*
- $\mathcal{F}(0)^0$ *эквивалентна категории представлений колчана* $\bullet \rightrightarrows \bullet$ *;*
- $\mathcal{G}^0$ *и* $\mathcal{H}^0$ *эквивалентны категории* $\mathcal{V}ect$*;*
- $\mathcal{I}^0$ *нулевая категория.*

Так как категория $\mathcal{V}ect$ расщепима, то из всех t-структур, индуцированных исключительными t-стабильностями, только для $\mathcal{A} = \mathcal{F}(0)^0$ производная категория $D^b(\mathcal{A})$ эквивалентна исходной $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ (см. [3]).

Напомним, что любая ограниченная t-структура на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ индуцирует грубые данные стабильности (лемма 3.2). По следствию 6.2 эта t-стабильность может быть измельчена до одной из стандартных ($\mathcal{M}$) или до одной из исключительных ($\mathcal{E}$). Поэтому, учитывая предложение 5.4, любая ограниченная t-структура получается разбиением множества наклонов $\mathcal{M}$ или $\mathcal{E}$ на две непересекающиеся части. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.7. *Любая ограниченная t-структура на $D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ по модулю действия группы* $\operatorname{Aut} D^b(\mathcal{C}oh\,\mathbb{P}_1)$ *эквивалентна одной из определённых выше t-структур:*

$$\mathcal{A}\,, \quad \mathcal{B}\,, \quad \mathcal{C}\,, \quad \mathcal{D}\,, \quad \mathcal{E}(p)\,, \quad \mathcal{F}(p)\,.$$

7. Данные стабильности на кривой положительного рода

В этом параграфе мы исследуем данные стабильности на ограниченной производной категории $\mathcal{T}_g = D^b(\mathcal{C}oh\,C_g)$ когерентных пучков на гладкой кривой C_g положительного рода g.

Сначала мы определим множество стандартных стабильностей, продолжающих стабильность Мамфорда – Такемото. Затем покажем, что любая t-стабильность на $\mathcal{T}_g$ индуцируется стабильностью на абелевой категории $\mathcal{C}oh\,C_g$. В случае эллиптической кривой C_1 мы докажем, что существует единственный тип тончайших t-стабильностей на $\mathcal{T}_1$, а именно стандартные, зависящие от выбора порядка на $\bar{\mathbb{Q}}$ копий кривой. В заключение мы перечислим все ограниченные t-структуры на $\mathcal{T}_1$.

Как показано в предложении 3.3, t-стабильность на производной категории от абелевой категории $\mathcal{A}$ можно построить как продолжение некоторой стабильности на $\mathcal{A}$. В свою очередь, на абелевой категории $\mathcal{A}$ мы можем определить данные стабильности с помощью положительной системы аддитивных функций из $K_0^*(\mathcal{A})$ (определение 2.3). Для категории $\mathcal{A} = \mathcal{C}oh\,C_g$ мы имеем исчерпывающую положительную систему функций $(\mathrm{rk}, \deg)$ (rk — ранг и $\deg$ — степень пучка). Каждому пучку $F \in \mathcal{C}oh\,C_g$ она сопоставляет наклон $\gamma(F)$ по правилу:

$$\gamma(F) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\deg F}{\operatorname{rk} F}\right) & \text{если } \operatorname{rk} F \neq 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку функция $\operatorname{arcctg} x$ строго убывает, $\gamma(F)$ эквивалентен наклону

$$\bar{\mu}(F) = \begin{cases} \frac{\deg F}{\operatorname{rk} F} & \text{если } \operatorname{rk} F \neq 0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наклон $\bar{\mu}$ принимает значения в естественно упорядоченном множестве

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \sqcup \{+\infty\}\,.$$

Пучок E $\bar{\mu}$-полустабилен, если для любого его подпучка $0 \neq F \subset E$ выполняется неравенство $\bar{\mu}(F) \leqslant \bar{\mu}(E)$. В частности, любой пучок кручения $\bar{\mu}$-полустабилен, а пучок свободный от кручения будет $\bar{\mu}$-полустабильным тогда и только тогда, когда он полустабилен по Мамфорду – Такемото (стабильность по Мамфорду – Такемото мы будем для краткости называть МТ-стабильностью).

Мы получаем данные стабильности $\big(\bar{\mathbb{Q}}, \{\Pi_q\}_{q\in\bar{\mathbb{Q}}}\big)$ (где полустабильная категория Π_q состоит из всех $\bar{\mu}$-полустабильных пучков наклона q) на абелевой категории $\mathcal{C}oh\, C_g$ и, следовательно, некоторую t-стабильность на производной категории $\mathcal{T}_g$. Ясно, что эта t-стабильность не является тончайшей.

Предложение 7.1. *Любая t-стабильность* Φ *на* $D^b(\mathcal{C}oh\, C_g)$ *при* $g > 0$ *утоньшается до t-стабильности, индуцированной некоторыми данными стабильности на* $\mathcal{C}oh\, C_g$.

Доказательство. Поскольку гомологическая размерность категории $\mathcal{C}oh\, C_g$ равна 1, достаточно убедиться, что Φ-полустабильные факторы $(E_{\varphi_0}, \ldots, E_{\varphi_n})$ HN-фильтрации любого пучка $E \in \mathcal{C}oh\, C_g$ лежат в абелевой категории: $E_{\varphi_i} \in \mathcal{C}oh\, C_g\ \forall i$. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 7.2. *Допустим, пучок* $E \in \mathcal{C}oh\, C_g$ *включается в треугольник*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, dashed] & \\ E \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

с $\mathrm{Hom}^{\leqslant 0}(Y, X) = 0$. *Тогда* $X, Y \in \mathcal{C}oh\, C_g$ *и* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(Y, X) = 0$.

Доказательство. Так как гомологическая размерность категории $\mathcal{T}_g$ равна 1, можно считать, что $X = X_0[0] \oplus X_1[1]$, где X_0, $X_1 \in \mathcal{C}oh\, C_g$ и $f = f_0 \oplus f_1$ с $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(E, X_0)$, $f_1 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(E, X_1)$. Более того, условие f_i=0 эквивалентно равенству нулю пучка X_i.

Рассмотрим расширение

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow G \xrightarrow{d_{-1}} E \longrightarrow 0, \tag{7.2}$$

соответствующее элементу f_1, и реализуем объект $X_1[1]$ комплексом $G \xrightarrow{d_{-1}} E$. Тогда f_1 будет представляться морфизмом комплексов:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"] \\ G \arrow[r, "d_{-1}"] & E \end{tikzcd}$$

Поэтому прямая сумма отображений $f_0 \oplus f_{-1}$ — это морфизм:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\mathrm{Id}_E \oplus f_0"] \\ G \arrow[r, "d_{-1}"] & E \oplus X_0 \end{tikzcd}$$

Конус $C(f_0 \oplus f_1)$ такого морфизма изоморфен комплексу вида

$$E \oplus G \xrightarrow{\delta_{-1}} E \oplus X_0,$$

чей дифференциал δ_{-1} определяется матрицей $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_E & d_{-1} \\ f_0 & 0 \end{pmatrix}$. Из коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & E \oplus G \arrow[r, "\delta_{-1}"] \arrow[d] & E \oplus X_0 \arrow[r] \arrow[d] & H^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{7.3}
$$

следует, что конус $C(f_0 \oplus f_1)$ изоморфен прямой сумме $H^{-1}[1] \oplus \operatorname{Coker} f_0[0]$. В новых обозначениях условие $\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(Y, X) = 0$ можно переписать так:

$$\operatorname{Hom}^{\leqslant 0}(H^{-1}[0] \oplus \operatorname{Coker} f_0[-1], X_0[0] \oplus X_1[1]) = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Hom}^0(\operatorname{Coker} f_0[-1], X_0[0]) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(\operatorname{Coker} f_0, X_0) = 0, \tag{7.4}$$

$$\operatorname{Hom}^0(H^{-1}[0], X_1[1]) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(H^{-1}, X_1) = 0. \tag{7.5}$$

По определению коядра, пространство $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(X_0, \operatorname{Coker} f_0)$ тривиально только тогда, когда тривиально само коядро $\operatorname{Coker} f_0$. С другой стороны, канонический дивизор K_g на кривой положительного рода либо равен нулю ($g = 1$), либо эффективен ($g > 1$). Значит, пространство $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(X_0, \operatorname{Coker} f_0(K_g))$ тоже нетривиально. По теореме двойственности Серра, отсюда вытекает, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(\operatorname{Coker} f_0, X_0) \neq 0$. Полученное противоречие с условием (7.4) показывает, что $\operatorname{Coker} f_0 = 0$.

В случае $X_1 \neq 0$ пространство $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(X_1, H^{-1})$ не равно нулю (см. диаграмму (7.3)). Следовательно, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}oh\, C_g}(X_1, H^{-1}(K_g)) \neq 0$. Вновь применяя теорему Серра, получаем: $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(H^{-1}, X_1) \neq 0$, что противоречит требованию (7.5). Значит, $X_1 = 0$ и треугольник (7.1) сводится к

$$
\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[dr, dashed] & \\
E \arrow[ur, "f_0"] & & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}
.
$$

Лемма, а с нею и предложение, доказаны. ■

Полное описание всех тончайших t-стабильностей на кривой рода $g > 1$ авторам пока не известно. Для эллиптической кривой оно приводится ниже.

7.1. Описание t-стабильностей на эллиптической кривой

Заметим, что для каждого рационального числа q существует МТ-стабильное расслоение F на эллиптической кривой C_1 наклона $\bar{\mu}(F) = q$. Обозначим множество всех таких МТ-стабильных расслоений через $\mathfrak{M}_q$. Хорошо известно, что $\mathfrak{M}_q$ естественно изоморфно самой кривой C_1 (см. [1]). Более того, если $F, G \in \mathfrak{M}_q$ и $F \neq G$, то $\mathrm{Hom}\,(F,G) = \mathrm{Hom}\,(G,F) = \mathrm{Ext}\,^1(F,G) = \mathrm{Ext}\,^1(G,F) = 0$. Обозначив ещё символом $\mathfrak{M}_\infty$ кривую C_1, параметризующую небоскрёбы $\mathcal{O}_x$, мы придём к множеству $\mathcal{M}_1$ полустабильных подкатегорий $\Pi_{(q,F)} = \langle F\rangle$, где $q \in \bar{\mathbb{Q}}$ и $F \in \mathfrak{M}_q$. Выбирая на каждом из множеств $\mathfrak{M}_q$ свой произвольный линейный порядок и лексикографически продолжая его до порядка на $\mathcal{M}_1$, мы построим тончайшие данные стабильности $(\mathcal{M}_1, \{\Pi_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}_1})$ на абелевой категории $\mathcal{C}oh\, C_1$ (существование HN-фильтрации очевидно).

После этого введём множество наклонов $D(\mathcal{M}_1) = \mathbb{Z}\times\mathcal{M}_1$ с лексикографическим порядком и определим полустабильные подкатегории как $\Pi_{(i,q,F)} = \langle F[i]\rangle$, где $F \in \mathfrak{M}_q$. Очевидно, $\big(D(\mathcal{M}_1), \{\Pi_\mu\}_{\mu\in D(\mathcal{M}_1)}\big)$ — тончайшие данные стабильности на $D^b(\mathcal{C}oh\, C_1)$ (предл. 3.3 и 5.5). Будем называть различные t-стабильности, полученные таким образом, стандартными.

Теорема 7.3. *Любая t-стабильность $(\Phi, \{\Theta_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ в ограниченной производной категории $\mathcal{T}_1$ когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой C_1 можно измельчить до одной из стандартных t-стабильностей $\big(D(\mathcal{M}_1), \{\Pi_\mu\}_{\mu\in D(\mathcal{M}_1)}\big)$. В частности, каждая тончайшая t-стабильность на $\mathcal{T}_1$ является стандартной.*

Доказательство. Поскольку любые данные стабильности на $\mathcal{T}_1$ индуцированы стабильностью на $\mathcal{C}oh\, C_1$, достаточно показать, что каждый неразложимый пучок E (образующая стандартной полустабильной категории) является Φ-полустабильным. Допустим, что это не так. Тогда, ввиду леммы 7.2, пучок E включается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0\,,$$

где $\mathrm{Hom}\,_{\mathcal{C}oh\, C_g}(Y,X) = 0$. По теореме двойственности Серра, это условие эквивалентно $\mathrm{Ext}\,^1_{\mathcal{C}oh\, C_g}(X,Y) = 0$, т. е. точная последовательность расщепляется и $E = X \oplus Y$. ■

Используя различные допустимые разложения множества наклонов $\mathcal{M}_1$, мы приведём полный список ограниченных t-структур на $\mathcal{T}_1$ по модулю действия группы $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}_1$. Каждая из них определяется подходящей коопрокидывающей парой кручения. Поэтому мы ограничимся только описанием этих пар.

Обозначим через X произвольное простое расслоение на кривой C_1, а через I — объединение рациональных чисел из промежутка $[0,1)$ с $\{\infty\}$. Тогда каждый элемент $q \in I$ и (возможно пустое) подмножество $P \subset \mathfrak{M}_q \simeq C_1$ многообразия модулей МТ-стабильных пучков на C_1 наклона q задают коопрокидывающую пару кручения $\Big(\mathcal{A}(q,P)_1,\, \mathcal{A}(q,P)_0\Big)$, где

$$\mathcal{A}(q,P)_0 = \langle X|\ \bar{\mu}(X) < q \text{ или } \bar{\mu}(X) = q \text{ и } X \in P\rangle\,,$$
$$\mathcal{A}(q,P)_1 = \langle X|\ \bar{\mu}(X) > q \text{ или } \bar{\mu}(X) = q \text{ и } X \notin P\rangle\,.$$

Заметим, что тавтологическая t-структура получается при $q = 0$ и $P = \varnothing$.

Итак, мы имеем теорему.

Теорема 7.4. *Любая ограниченная t-структура на ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{C}oh\, C_1)$ когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой по модулю действия группы* $\operatorname{Aut} D^b(\mathcal{C}oh\, C_1)$ *определяется одной из коопрокидывающих пар кручения, описанных выше.*

Литература

[1] Atiyah, M.F. *Vector Bundles Over an Elliptic Curve*. Proc. Lond. Math. Soc, **VII** (1957) 414-452.

[2] Beilinson, A.A. *Coherent Sheaves on $\mathbb{P}^n$ and Problems in Linear Algebra*. Funk. An., **12** (1978), p. 68–69.

[3] A.I. Bondal. *Helices, Representations of Quivers and Koszul Algebras*. Helices and Vector Bundles: Seminare Rudakov. London Math. Soc., Lect. N. Ser. **148** (1990). p. 75–95.

[4] A. Bondal, D. Orlov. *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*. Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.

[5] A. Bondal and M. Van den Bergh. *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*. Moscow Mathematical Journal v. 3 (2003) N 1. (Также в arXiv:math.AG/0204218 v2.)

[6] Tom Bridgeland. *Stability conditions on triangulated categories*. arXiv:math.AG/0212237.

[7] Tom Bridgeland. *Stability conditions on K3 surfaces*. arXiv:math.AG/0307164 v1.

[8] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. *Методы гомологической алгебры*. т. 1. М.:Наука, 1988.

[9] Michael R. Douglas. *Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability*. arXiv:math.AG/0207021.

[10] Gieseker, D.: *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*. Ann. of Math. 106, 45 (1977).

[11] A. Gorodentsev, S. Kuleshov: *Helix theory*. Preprint MPI 2001 (97).

[12] D. Happel, I. Reiten, and S. Smalo. *Tilting in abelian categories and quasitilted algebra*, Memoirs of the AMS, vol. 575, Amer. Math. Soc., 1996.

[13] Maruyama, M.: *Moduli of stable sheaves I*. J. Math. Kyoto 17, 91 (1977).

[14] Maruyama, M.: *Moduli of stable sheaves II*. J. Math. Kyoto 18, 557 (1978).

[15] A. Rudakov. *Stability for an abelian category*. J. Algebra 197 (1997), no. 1, 231–245

`e-mail:`	Городенцев А.	`gorod@itep.ru`
	Кулешов С.	`kuleshov@mail.miem.edu.ru`
	Рудаков А.	`rudakov@math.ntnu.no`