УДК 512.7

А. Л. Городенцев[1]
А. Н. Тюрин[2]

АЛАГ

(Абелева Лагранжева Алгебраическая Геометрия)

Москва, Июнь 2000

Abstract. We start here a detailed explanation of the geometric quantization concept for linking the Lagrangian and Algebraic geometries as it was indicated in preprints [T1], [T2], [T2], … . An infinite dimensional Kähler variety $\mathcal{P}^{\mathrm{hw}}$, of half weighted Planckian cycles, is introduced for any real symplectic manifold M equipped with a $U(1)$ line bundle L. For any Kähler polarization on M we construct a canonical map $\mathcal{P}^{\mathrm{hw}} \xrightarrow{\gamma} H^0(M, L)$ to the space of holomorphic sections and show that it has a constant Kähler angle; turning this map to a holomorphic one we get the Borthwick - Paul - Uribe map. We also present the simplest non trivial illustration of these constructions in the framework of Legendrian knots in S^3.

Краткая аннотация. Этой работой мы начинаем детальное изложение геометрической концепции квантования, представленной в серии препринтов [T1], [T2], [T3], … , которая соединяет в себе методы алгебраической и лагранжевой геометрии. Вводится бесконечномерное келерово многообразие $\mathcal{P}^{\mathrm{hw}}$ полувзвешенных планковских циклов, связанное с любым $U(1)$-расслоением предквантования L на произвольном симплектическом многообразии M. Строится канонически ассоциированное с каждой келеровой поляризацией на M отображение $\mathcal{P}^{\mathrm{hw}} \xrightarrow{\gamma} H^0(M, L)$ в пространство голоморфных сечений расслоения предквантования. Мы показываем, что это отображение имеет постоянный келеров угол, и его «доворот» до голоморфного отображения представляет собой отображение Бортвика - Паоля - Урибе. Простейшей нетривиальной иллюстрацией всех этих конструкций служит теория лежандровых узлов в S^3.

Содержание

[1]Институт Теоретической и Эксперементальной Физики & Независимый Московский Университет
[2]Математический Институт РАН

Введение

0.1. Квантование. Математическим выражением классической гамильтоновой динамики является симплектическая геометрия (см. [A]). Гладкое (возможно, некомпактное) C^∞-многообразие M называется *симплектическим*, если на нём зафиксирована *симплектическая структура*, т. е. *замкнутая* 2-форма ω, задающая кососимметрический *изоморфизм* $\omega : TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ между касательным и кокасательным расслоениями на M (в частности, $\dim M$ чётна). Симплектическая форма задаёт на пространстве гладких функций $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли относительно *скобки Пуассона*: $\{f_1, f_2\} \overset{\text{def}}{=} \omega(H_{f_1}, H_{f_2})$, где через $H_f \overset{\text{def}}{=} \omega^{-1}(df)$ обозначено *гамильтоново векторное поле* (или *симплектический градиент*) гладкой функции $f \in C^\infty(M)$, однозначно определяемое условием $\omega(H_f, v) = df(v)$ для любого поля v; потоки вдоль гамильтоновых векторных полей сохраняют симплектическую форму ω и доставляют решение классической системы гамильтоновых уравнений на фазовые траектории частиц.

В идеале, под *квантованием* такой механической системы понимается некая гипотетическая процедура Q, которая бы перерабатывала симплектическое многообразие (M, ω) в гильбертово пространство $Q(M, \omega)$, называемое пространством *волновых функций*, и сопоставляла бы каждой вещественной функции $f \in C^\infty(M)$ самосопряжённый оператор $Q(M, \omega) \xrightarrow{Q(f)} Q(M, \omega)$ на этом пространстве так, чтобы $Q(f)$ линейно зависели от f, константы представлялись бы скалярными гомотетиями, и выполнялись бы *коммутационные соотношения Дирака*:

$$[Q(f_1), Q(f_2)] = ih\, Q(\{f_1, f_2\})\,. \tag{0-1}$$

Кроме того, на получающееся представление обычно накладывают то или иное условие неприводимости. К несчастью, а может быть, и к счастью, удовлетворить перечисленным требованиям невозможно в виду теоремы Ван Хува (см. [AM]). Математические попытки выхода из создавшегося положения сводятся к поискам подходящего расширения области классических объектов и/или надлежащего ослабления перечисленных выше «правил квантования». Делать это, разумеется, можно многими путями, в результате чего развитие нынешней «квантовой математики» напоминает радиоактивный распад, идущий, преимущественно, по трём лучам, которые можно характеризовать как *алгебраический*, *аналитический*, и *геометрический*.

Мы не будем здесь останавливаться на первых двух направлениях, развитых в настоящее время особенно широко, отметив лишь, что алгебраическое квантование — квантовые деформации, $*$-произведения, некоммутативная геометрия и т. д. — обычно полностью игнорирует геометрию исходной классической механической системы, тогда как аналитический подход — пространства Харди, проекторы Сёге, спектральная теория операторов Фурье и т. д. — напротив, очень привязан к ней.

Геометрическое квантование фиксирует на M комплексное линейное векторное расслоение L, снабжённое эрмитовой структурой и эрмитовой связностью a с формой кривизны $F_a = ih\omega$. В качестве пространства волновых функций $Q(M, \omega)$ берётся пространство $\Gamma(L)$ гладких сечений расслоения L и каждой функции $f \in C^\infty(M)$ сопоставляется оператор

$$Q(f) = ih\nabla^a_{H_f} + f$$

на этом пространстве (в этой формуле $\nabla^a_{H_f}$ в первом слагаемом правой части обозначает индуцированный связностью a оператор ковариантного дифференцирования сечений расслоения L вдоль гамильтонова векторного поля H_f, а второе слагаемое представляет собой оператор умножения сечений на функцию f). Легко проверить, что все такие операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям Дирака (0-1) и самосопряжены относительно стандартной гильбертовой структуры на $\Gamma(L)$, заданной интегрированием поточечного эрмитова скалярного произведения сечений по симплектическому объёму на M. Однако, даже в простейшем двумерном случае результат такого предквантования не укладывается в описанную выше шредингеровскую схему: пространство всех сечений слишком велико.

Геометрическая модификация правил квантования состоит в фиксации на многообразии M дополнительной геометрической структуры — *поляризации*, т. е. выборе замкнутого относительно скобок Ли лагранжева подрасслоения $P \subset TM \otimes \mathbb{C}$ в комплексифицированном касательном расслоении. В качестве пространства волновых функций теперь берётся подпространство $\Gamma_P(L) \subset \Gamma(L)$, сечений, ковариантно постоянных в направлениях P. Однако, произвольный оператор $Q(f)$ не будет *a priori* сохранять подпространство $\Gamma_P(L)$, и мы должны ограничиться пространством тех функций f, чьи гамильтоновы потоки сохраняют поляризацию P. К сожалению, такой набор гамильтонианов оказывается слишком беден и мы опять будем вынуждены чем-то жертвовать ...

В настоящее время известно несколько теорий, идущих в намеченном только что направлении, и во многих из них имеются хорошо понятые примеры, показывающие, что результат квантования по-существу *не зависит* от фиксации дополнительной геометрической жёсткости на M. Это наблюдение возрождает надежду на то, что всё-таки существует единая универсальная «геометрия квантования», которая стоит за перечисленными выше «правилами» и объемлет все имеющиеся физически содержательные конкретные примеры. Попыткой создания оснований такой геометрии и является настоящая работа. Эти основания мы видим в абелевой лагранжевой алгебраической геометрии (АЛАГ), берущей начало на «геометрическом луче» квантовой математики и объединяющей в привычных рамках комплексной проективной геометрии как изощрённые аналитические методы лагранжевой геометрии, так и физически осмысленную формальную квантовую алгебру. В рамках настоящей работы мы, однако, ограничимся лишь случаем *келеровой* поляризации, приводящей в простейшем примере $M = \mathbb{C}$ к пространству Баргмана - Сегала - Фока голоморфных функций на $\mathbb{C}$ с суммируемым квадратом[1], которое, в частности, содержит гамильтониан гармонического асцилятора.

0.2. От симплектической геометрии к алгебраической. Алгебро-геометрический дух присутствует практически во всех базисных аналитических конструкциях: главными действующими лицами в исследовании классических и квазиклассических механических систем методами симплектической геометрии являются *лагранжевы подмногообразия* (детали этого «симплектического кредо» см. в [We1, стр. 5]) — симплектическая геометрия алгебраически может трактоваться как категория, морфизмы в которой определяются посредством лагранжевых подмногообразий (опять см. [We1]), что очень близко к мотивной идеологии в алгебраической геометрии; а спектральная теория интегральных операторов Фурье, на которой основано квантование контактных многообразий по Буте Де Монвилю и Гийемину, полностью параллельна теории полиномов Гильберта.

Наиболее прямой путь от симплектической геометрии к алгебраической состоит в том, чтобы зафиксировать на M *келерову поляризацию*, т. е. снабдить M комплекс-

[1]относительно гауссовой меры, связанной с эрмитовой структурой на тривиальном линейном расслоении

ной структурой I и эрмитовой метрикой, мнимая часть которой совпадает с ω. Если предположить дополнительно, что класс когомологий $[\omega]$ является целым, то на келеровом многообразии M_I будет существовать голоморфное комплексное эрмитово линейное расслоение L с $c_1(L) = [\omega]$ и эрмитовой связностью a с формой кривизны $2\pi i\,\omega$. Стандартная геометрическая конструкция при каждом $k \in \mathbb{N}$ связывает с таким расслоением отображение

$$\varphi_k : M_I \xhookrightarrow{x \mapsto Ann(x)} \mathbb{P}H^0(M_I, L^{\otimes k})^* \tag{0-2}$$

из M в комплексное проективное пространство (через $H^0(M_I, L^{\otimes k})$ мы обозначаем пространство глобальных голоморфных сечений расслоения $L^{\otimes k}$ относительно комплексной структуры, индуцированной I). По теореме Кодаиры, отображения (0-2) являются при $k \gg 0$ голоморфными вложениями, т. е. позволяет смотреть на M_I как на проективное алгебраическое многообразие.

С другой стороны, аналитически мы можем воспринимать пространство голоморфных сечений как подпространство $H^0(M_I, L^{\otimes k}) \subset C^\infty(M, L^{\otimes k})$ в бесконечномерном пространстве всех гладких сечений. На пространстве гладких сечений имеются скалярное произведение и норма, индуцированные лиувилевой формой объёма $\Omega = \omega^{\wedge n}$ на M и эрмитовой формой $(\,*\,,\,*\,)_{L^{\otimes k}}$ на $L^{\otimes k}$ по обычным правилам

$$\langle\, s_1\,,\, s_2\,\rangle_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_M (s_1, s_2)_{L^{\otimes k}}\,\Omega\,, \quad \|s\|_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle\, s\,,\, s\,\rangle_k}\,, \quad s_1, s_2, s \in C^\infty(M, L^{\otimes k})\,.$$

Таким образом, $Q_k(M_I) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(M_I, L^{\otimes k})$ является замкнутым подпространством гильбертова пространства $L^2(M, L^{\otimes k})$ (пополнения $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ по описанной только что норме). Гильбертово пространство $Q_k(M_I) \subset L^2(M, L^{\otimes k})$ называется пространством *волновых функций уровня* k, его проективизация — *пространством состояний*, а ортогональный проектор

$$L^2(M, L^{\otimes k}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M_I, L^{\otimes k})$$

называется *проектором Сёге*. Описанное в предыдущем абзаце голоморфное проективное вложение φ_k в композиции с (происходящим из эрмитовой структуры на $L^{\otimes k}$) изоморфизмом $\mathbb{P}\left(\,H^0(M_I, L^{\otimes k})^*\,\right) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{P}\left(\,H^0(M_I, L^{\otimes k})\,\right)}$ даёт при $k \gg 0$ антиголоморфное вложение

$$M_I \xhookrightarrow{\overline{\varphi}_k} \mathbb{P}\left(\,H^0(M_I, L^{\otimes k})\,\right)\,.$$

Состояния, попавшие в образ этого вложения, называются *когерентными*. Далее, каждой функции $f \in C^\infty(M)$ отвечает *тёплицев оператор*

$$H^0(M_I, L^{\otimes k}) \xrightarrow{T_f^{(k)}} H^0(M_I, L^{\otimes k}) \;:\quad s \longmapsto \Pi_k(f \cdot s)\,.$$

Сопоставление $f \longmapsto T_f^{(k)}$ задаёт линейное отображение Березина - Тёплица из (коммутативной) алгебры функций в (некоммутативную) матричную алгебру:

$$C^\infty(M) \xrightarrow{T_k} End\big(H^0(M_I, L^{\otimes k})\big)\,,$$

которое, хотя ни коим образом и не согласуется ни с умножением, ни с пуассоновой структурой, имеет хорошую ассимптотику по k, в том смысле, что согласно теореме Бордемана - Мейнренкена - Шлихенмайера (см. [BMS]) для любой $f \in C^\infty(M)$ существует константа $K_f > 0$, такая что

$$\|f\|_\infty + \frac{K_f}{k} \le \left\|T_f^{(k)}\right\| \le \|f\|_\infty$$

и для любых $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ при $k \to \infty$ мы имеем ассимптотику

$$\left\| k \cdot i \, [\, T^{(k)}_{f_1} \, , \, T^{(k)}_{f_2} \,] - T^{(k)}_{\{f_1, f_2\}} \right\| \;\sim\; \left\| T^{(k)}_{f_1} \cdot T^{(k)}_{f_2} - T^{(k)}_{f_1 \cdot f_2} \right\| \;\sim\; O(1/k) \;,$$

где под $\|f\|_\infty$ имеется в виду sup-норма на $C^\infty(M)$, а на $End\left(H^0(M_I, L^{\otimes k}) \right)$ берётся стандартная операторная норма

$$\left\| T^{(k)}_f \right\| = \sup_{s \neq 0} \left(\|T^{(k)}_f(s)\| \, / \, \|s\| \right) \; .$$

Иными словами, условия Дирака выполняются асимптотически при $k \to \infty$ (это называется хорошим *квазиклассическим поведением*). Более того, Шлихенмайер показал, что отображение Березина - Тёплица доставляет единственную строгую квантовую деформацию алгебры $C^\infty(M)$ с хорошим квазиклассическим поведением.

0.3. АЛАГ. Как мы уже отмечали, в известных примерах, где описанная нами процедура квантования просчитана достаточно подробно, проективные пространства состояний $\mathbb{P}\,(\, Q_k(M_I)\,)$ оказываются *post factum* не зависящими от выбора комплексной структуры, которая *a priori* существенно участвует в построении подлежащих гильбертовых пространств $Q_k(M_I)$. Точнее, на голоморфном векторном расслоении $Q_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{M}$ над пространством модулей поляризованных комплексных структур на (M, ω) (слой этого расслоения над точкой $I \in \mathcal{M}$ есть пространство $Q_k(M_I)$) имеется естественная *плоская проективная связность* (детали см. в [Hi1]). Этот феномен геометрически обусловлен тем, что в пространстве лагранжевых циклов на M имеется естественное подмногообразие конечной коразмерности, обладающее *внутренней* келеровой структурой, обусловленной одной лишь симплектической геометрией M, что позволяет устроить «универсальное погружение» симплектической геометрии на M в алгебраическую геометрию, которое посредством привычных алгебро-геометрических приёмов управляет всеми специальными алгебро-геометрическими свойствами M, возникающими при фиксации на M дополнительных данных. Точный смысл этих слов читатель узнает из следующего далее основного текста настоящей работы.

Организован он так. В § 1 мы напоминаем необходимые нам (по большей части, стандартные) концепции симплектической и дифференциальной геометрии: лагранжевы циклы, униформизация Дарбу - Вейнстейна, взаимодействие симплектической и почти эрмитовой структур, абелевы связности и унитарные характеры фундаментальной группы, якобианы и т. д. В § 2 мы вводим пространства бор-зоммерфельдовых и планковых циклов и дополнительные структуры на них: расслоения Берри, полувеса и т. д. Мы строим канонические интегрируемые келеровы структуры на пространствах $\mathcal{P}^{\rm hw}_k$ полувзвешенных планковых циклов уровня k и $\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}$ бор-зоммерфельдовых циклов уровня k и фиксированного объёма t. Центральное место работы занимает § 3, где мы детально описываем процедуру геометрического квантования посредством келеровой поляризации и даём геометрическое описание голоморфных отображений Бортвика - Пауля - Урибе: $\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t} \xrightarrow{\ \mathrm{BPU}_k\ } \mathbb{P}\left(H^0(L^{\otimes k})^* \right)$. В последнем § 4 мы прослеживаем, как все наши конструкции выглядят в простейшем нетривиальном примере, где в качестве исходной симплектической системы (M, ω) выступает риманова сфера $S^2 \simeq \mathbb{CP}_1$ со стандартной келеровой формой. Лагранжевы циклы при этом превращаются в уникурсальные кривые на S^2, а планковские циклы — в лежащие над такими кривыми лежандровы узлы на S^3, расслоенной над S^2 по Хопфу. Таким образом, эта «простейшая» иллюстрация АЛАГ охватывает теорию лежандровых узлов.

§ 1. Предварительные сведения и обозначения.

1.1. Лагранжева геометрия. Через (M,ω) мы всегда обозначаем гладкое $2n$-мерное ориентированное вещественное многообразие M с фиксированной замкнутой кососимметричной 2-формой ω, задающей изоморфизм между касательным и кокасательным расслоениями:

$$\omega : TM \xrightarrow{\sim} TM^* \ . \tag{1-1}$$

Фиксируем какое-либо гладкое n-мерное ориентированное вещественное многообразие S, а также некоторый гомотопический класс $Map_{\text{LA}}(S,M)$ гладких отображений

$$S \xrightarrow{\varphi} M \ ,$$

удовлетворяющих условию $\varphi^*(\omega) = 0$. Пространство $Map_{\text{LA}}(S,M)$ называется пространством *лагранжевых* отображений (фиксированного топологического типа) и представляет собой бесконечномерное многообразие с естественным действием группы $Diff_0(S)$ гомотопных тождественному диффеоморфизмов S по правилу $h : \varphi \mapsto \varphi \circ h^{-1}$, где $h \in Diff_0(S)$, $\varphi \in Map_{\text{LA}}(S,M)$. Соответствующее пространство орбит

$$\mathfrak{L} \stackrel{\text{def}}{=} Map_{\text{LA}}(S,M)/Diff_0(S)$$

называется пространством *лагранжевых циклов*[1].

Лагранжев цикл $S \xrightarrow{f} M$ называется *гладко вложенным* (соотв. *гладко погруженным*), если φ является гладким вложением (соотв. погружением). В первом случае образ $f(S) \subset M$ называется *лагранжевым подмногообразием* в M, и условие $\varphi^*\omega = 0$ означает, что ω ограничивается на TS в тождественно нулевую форму. В обоих случаях изоморфизм (1-1), доставляемый симплектической структурой на M, отождествляет нормальное расслоение с кокасательным:

$$N_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^*(TM)/TS \simeq \varphi^*(T^*M)/Ann\,(TS) \simeq T^*S \ .$$

1.1.1. Пример: кокасательное расслоение. Пусть $M = T^*S \xrightarrow{p} S$ представляет собой кокасательное расслоение гладкого ориентированного многообразия S. Тогда на M имеется каноническая 1-форма η, которая называется *формой действия* и сопоставляет касательному вектору $w \in T_{(\xi,x)}T^*S$ с $x \in S$, $\xi \in T^*_xS$ число

$$\eta(w) \stackrel{\text{def}}{=} p^*\xi(w) \ . \tag{1-2}$$

Её дифференциал $\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\eta$ доставляет симплектическую структуру на M. Над локальной открытой картой $U \subset S$, где $T^*S|_U = U \times \mathbb{R}^n$, в координатах

$$(q,p) = (\, q_1, q_2, \dots, q_n \ , \ p_1, p_2, \dots, p_n \,) \ ,$$

таких что q_i суть координаты на U, а p_i — это линейные координаты вдоль dq_i на $\mathbb{R}^n$, формы η и ω записываются в виде

$$\eta(p,q) = \sum_{j=1}^n p_j dq_j \quad , \qquad \omega(p,q) = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j \ . \tag{1-3}$$

[1] В настоящей работе мы полностью игнорируем все вопросы, связанные с глобальной геометрией и топологией пространства $\mathfrak{L}$ и будем заниматься лишь локальным анализом вблизи гладких точек, где $\mathfrak{L}$ допускает довольно простое описание (см. ниже).

В частности, слои проекции $M \twoheadrightarrow S$ и нулевое сечение $S \xhookrightarrow{s_0} M$ являются лагранжевыми подмногообразиями в M. Произвольное сечение $S \xhookrightarrow{s} M$ можно воспринимать как график 1-формы $\alpha_s = s^*(\eta)$, такой что локально $s(x) = (x, \alpha_s(x)) \in U \times \mathbb{R}^n = T^*S|_U$. Этот график является лагранжевым подмногообразием в M тогда и только тогда, когда форма α_s замкнута, поскольку $s^*(\omega) = s^*(d\eta) = ds^*(\eta) = d\alpha_s$.

1.1.2. Касательное пространство к $\mathfrak{L}$ в гладко погруженном цикле. Касательное пространство $T_\varphi Map(S, M)$ в гладком погружении $S \xrightarrow{\varphi} M$ представляет собой пространство гладких сечений $C^\infty(S, \varphi^*TM)$ поднятого касательного расслоения на M, поскольку малые 1-параметрические деформации φ суть сдвиги вдоль интегральных траекторий векторных полей v, определённых локально вблизи $\varphi(S)$. Сохранение условия $\varphi^*(\omega) = 0$ при таком сдвиге равносильно равенству $\varphi^*(\mathcal{L}_v\omega) = 0$. Наконец, касательное пространство к проходящей через φ орбите группы $Diff_0(S)$ состоит из $v \in C^\infty(S, TS) \subset C^\infty(S, \varphi^*TM)$. Таким образом,

$$T_\varphi\big(Map(S, M)/Diff_0(S)\big) = \{\, v \in \mathcal{C}^\infty\,(\,S,\; N_\varphi\,) \mid \varphi^*(\mathcal{L}ie_v\omega) = 0\,\}\,.$$

Описанное в n° 1.1 отождествление нормального расслоения N_φ с кокасательным расслоением $T^*\varphi(S)$ отправляет векторное поле v из предыдущей формулы в 1-форму $\xi = \varphi^*(i_v\omega) \in C^\infty(S, T^*S)$. При этом поля $v \in T_\varphi\mathfrak{L}$ переходят в *замкнутые* 1-формы, поскольку $d\xi = d\varphi^*(i_v\omega) = \varphi^*(di_v\omega) = \varphi^*(\mathcal{L}_v\omega + i_v d\omega) = \varphi^*(\mathcal{L}_v\omega) = 0$. Мы получаем

1.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Касательное пространство $T_\varphi\mathfrak{L}$ в гладко погруженном лагранжевом цикле $S \xrightarrow{\varphi} M$ естественно отождествляется с пространством $Z^1_{\text{DR}}(S)$ замкнутых 1-форм на S.* $\square$

1.1.4. Униформизация Дарбу - Вейнстейна. Знаменитая теорема Дарбу - Вейнстейна в одной из своих многочисленных переформулировок (см. [GS, Ch.4, § 1], [We3, § 6], и [We4, § 4]) утверждает, что для каждого гладко погруженного лагранжева цикла $S \xhookrightarrow{\varphi} M$ можно указать открытую трубчатую окрестность U вокруг нулевого сечения кокасательного расслоения T^*S и гладкое погружение $U \xhookrightarrow{\widehat{\varphi}} M$, такое что $\widehat{\varphi}^*\omega = d\eta$ есть стандартная симплектическая структура на T^*S, а ограничение $\widehat{\varphi}$ на нулевое сечение совпадает с исходным погружением φ. Если исходное погружение было вложением, то можно считать, что $U = T^*S$, и $\widehat{\varphi}$ доставляет симплектический изоморфизм кокасательного расслоения T^*S (оснащённого стандартной симплектической структурой, описанной в n° 1.1.1) с открытой трубчатой окрестностью лагранжева подмногообразия $f(S) \subset M$.

Гладкое погружение $T^*S \supset U \xrightarrow{\widehat{\varphi}} M$, продолжающее по Дарбу - Вейнстену исходное погружение $S \xrightarrow{\varphi} M$, переводит содержащиеся в U графики замкнутых 1-форм в лагранжевы циклы, лежащие вблизи $\varphi(S)$ на M. В результате возникает *экспоненциальное отображение*

$$T_S\mathfrak{L} \supset \mathfrak{U} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{L}\,, \tag{1-4}$$

где $\mathfrak{U} \subset Z^1_{\text{DR}}(S)$ состоит из всех 1-форм ξ, график которых содержится в U. Из результатов Вейнстейна [We3, § 6], [We4, § 4] следует, что образ отображения (1-4) содержит некоторую открытую окрестность исходного цикла φ в подходящей топологии на $\mathfrak{L}$. Таким образом, вблизи гладкого погружения $S \xrightarrow{\varphi} M$ пространство $\mathfrak{L}$ является (бесконечномерным) гладким многообразием, в качестве карты на котором можно использовать окрестность нуля в пространстве замкнутых 1-форм $Z^1_{\text{DR}}(S)$. Подпространства *точных* 1-форм $B^1_{\text{DR}}(S) \subset Z^1_{\text{DR}}(S) = T_S\mathfrak{L}$ составляют на $\mathfrak{L}$ гладкое распределение коразмерности $b_1 = \dim H^1(S,\mathbb{R})$. Локально, вблизи каждого гладкого погруженного цикла, экспоненциальное отображение интегрирует это распределение до слоения, листы которого имеют коразмерность b_1 и называются *изодрастами*[1]. Графики двух близких замкнутых 1-форм на S лежат на одной изодрасте, если и только если формы когомологичны.

1.2. Псевдокелерова геометрия. Гладкое вещественное $2n$-мерное многообразие M называется *псевдоголоморфным* (соотв. *псевдоэрмитовым*), если на TM задана структура комплексного (соотв. эрмитова) расслоения ранга n. Последнее означает, что на TM имеются: $\mathbb{R}$-линейный оператор $TM \xrightarrow{I} TM$, риманова метрика $g : TM \xrightarrow{\sim} TM^*$ и невырожденная кососимметрическая форма $\omega : TM \xrightarrow{\sim} TM^*$, удовлетворяющие условиям: $I^2 = -\mathrm{Id}$, $g(v,w) = \omega(Iv,w)$, $\omega(v,Iw) = -\omega(Iv,w)$ и $g(v,Iw) = -g(Iv,w)$ (в действительности, тройка (I,g,ω) однозначно восстанавливается по любым двум своим элементам при помощи этих условий). Псевдоголоморфность предполагает лишь наличие одного оператора комплексной структуры I. Псевдоэрмитово многообразие M называется *псевдокелеровым*, если косая форма ω замкнута, т. е. определяет симплектическую структуру M.

Псевдоголоморфные многообразия обладают многими «линейно - алгебраическими» свойствами комплексно - аналитических пространств, поскольку комплексифицированное касательное расслоение на любом псевдоголоморфном многообразии M тоже распадается в прямую сумму $\mathbb{C}\otimes TM = T_+M \oplus T_-M$ собственных подпространств оператора I, отвечающих его собственным значениям $\pm i$. В частности, на таком многообразии определён класс *псевдоголоморфных функций* $M \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, дифференциал которых df аннулирует подпространство T_-M, а также псевдоголоморфные подмногообразия, которые локально определяются как множества общих нулей системы псевдоголоморфных функций, псевдоголоморфные комплексные векторные расслоения, и т. д.

1.2.1. ЛЕММА. *Пусть $V \subset M$ является (возможно, особым) псевдоголоморфным подмногообразием гладкого псевдоэрмитова многообразия M. Тогда ограничение формы ω на касательный конус TC_xV к V в любой точке $x \in V$ невырождено в том смысле, что для любого ненулевого вектора $v \in TC_xV$ существует $u \in TC_xV$, такой что $\omega(v,u) \neq 0$.*

Доказательство. Псевдоголоморфность V означает, что оператор I переводит касательный конус TC_xV в себя, и тем самым, действует на нём биективно, ибо $I^{-1} = -I$. Поскольку риманова метрика g положительно определена, для любого ненулевого вектора $v \in TC_xV$ мы имеем $\omega(v,Iv) = -g(v,v) < 0$ и можем взять $u = Iv$. □

1.2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Никакое ненулевое псевдоголоморфное сечение никакого псевдоголоморфного линейного расслоения на псевдоэрмитовом многообразии не может тождественно зануляться ни на каком лагранжевом цикле.*

Доказательство. Множество нулей ненулевого псевдоголоморфного сечения линейного расслоения представляет собой псевдоголоморфное подмногообразие Z размерности $\leq (2n-2)$ на исходном $2n$-мерном псевдоэрмитовом многообразии M. Поэтому, если Z содержит какой-либо n-мерный лагранжев цикл S, то ограничение формы ω на TZ обязательно будет вырождено вдоль S, что невозможно по предыдущей лемме. □

1.2.3. Пример: касательные расслоения. Пусть $M = TX$ — это касательное расслоение произвольного гладкого вещественного n-мерного ориентированного многообразия

[1] развёрнутая этимология этого (греческого) термина имеется в [We2]

X. Тогда на M имеется каноническая псевдоголоморфная структура, приходящая из расщепления $TM = T(TX) = TX_\uparrow \oplus TX_\rightarrow$, в котором «вертикальное» подпространство $TX_\uparrow \simeq TX$ представляет собой ядро дифференциала естественной проекции $TX \twoheadrightarrow X$, а «горизонтальное» подпространство $TX_\rightarrow \simeq TX$ есть образ дифференциала нулевого сечения $X \hookrightarrow TX$. На языке этого разложения оператор умножения на $i \in \mathbb{C}$ в точке $(v, q) \in TX$ с $v \in T_xX$, $q \in X$ переводит касательный вектор $w = (w_1, w_2) \in T(v, q)TX$ в $(-w_2, w_1)$. Более того, эта комплексная структура интегрируема: каждая локальная система координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ на X вблизи $q \in X$ даёт систему *комплексных* координат $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ на TX с $z_\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_\nu + i\, y_\nu$, где через x_ν обозначена линейная координата вдоль базисного вектора $\partial/\partial y_\nu$ в слое T_qX. Легко проверить, что гладкая замена координат y на X приводит к голоморфной замене координат z на TX, которые, тем самым, составляют комплексно - аналитический атлас. В терминах этого атласа, действие умножения на $i \in \mathbb{C}$ в $T_{(v,q)}TX$ происходит по правилу: $(\,\partial/\partial x\,,\,\partial/\partial y\,) \mapsto (\,\partial/\partial y\,,\,-\partial/\partial x\,)$.

Напомним теперь (см. n° 1.1.1), что на кокасательном расслоении T^*X есть каноническая симплектическая структура $\omega = d\eta$, симплектический базис которой в касательном пространстве $T(T^*X)$ имеет вид $(dy, \partial/\partial y)$. Следовательно, любой изоморфизм расслоений $TX \xrightarrow{\sim} T^*X$, задаёт *слабую* псевдокелерову структуру на обоих многообразиях TX, T^*X, т. е. определяет на каждом из них тройку (I, g, ω), удовлетворяющую всем перечисленным в начале n° 1.2 условиям за исключением, разве что, положительности симметрической формы $g(u_1, u_2) = \omega(u_1, Iu_2)$. В частности, если на X задана риманова метрика $TX \xrightarrow{G} T^*X$, то на кокасательном расслоении $M = T^*X$ возникает интегрируемая комплексная структура $I : (\xi, v) \longmapsto (Gv, -G^{-1}\xi)$, согласованная с канонической симплектической формой $\omega = d\eta$ из (1-3); более того, в этом случае симметрическая форма $g(u_1, u_2) = \omega(u_1, Iu_2)$ будет положительно определена, и $M = T^*X$ будет полноценным (правда, некомпактным) келеровым многообразием.

1.3. Эрмитовы линейные расслоения. В этой работе мы будем иметь дело с комплексными эрмитовыми линейными расслоениями на гладких ориентированных вещественных многообразиях X. Такое расслоение $L \twoheadrightarrow X$ однозначно с точностью до изоморфизма определяются своим первым классом Чженя $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ и тавтологически ассоциировано с главным $U(1)$ - расслоением $P \twoheadrightarrow X$ единичных окружностей в L, т. е. $L = P \times_{U(1)} \mathbb{C}$.

Алгебру Ли $\mathfrak{su}(1)$ мы всегда будем отождествлять с $\mathbb{R}$ так, чтобы экспоненциальное отображение $\mathbb{R} = \mathfrak{su}(1) \twoheadrightarrow U(1)$ имело вид $t \longmapsto e^{2\pi i t}$ и тавтологическое действие $\mathbb{R} = \mathfrak{su}(1)$ на $\mathbb{C}$ происходило по правилу $z \xmapsto{t} 2pit\, z$. Мы обозначаем через ν единственную инвариантную 1-форму на $U(1)$ с $\displaystyle\int_{U(1)} \nu = 1$, а через u — двойственное инвариантное векторное поле, так что $\nu(u) = 1$. Буквой u мы также будем обозначать соответствующее вертикальное векторное поле на любом главном $U(1)$ - расслоении $P \twoheadrightarrow X$.

1.3.1. Эрмитова связность на главном $U(1)$-расслоении $P \xrightarrow{p} X$ представляет собой 1-форму α, удовлетворяющую условиям $\mathcal{L}ie_u\alpha = 0$ и $\alpha(u) = 1$, первое из которых означает $U(1)$-инвариантность формы α, а второе — что α является проектором касательного пространства к P на вертикальное подпространство, касательное к слою, т. е. расщепляет каноническую точную тройку касательных пространств

$$0 \longrightarrow TU(1) \underset{\longrightarrow}{\overset{\alpha}{\longleftarrow}} TP \xrightarrow{dp} p^*TX \longrightarrow 0$$

(и гиперплоскости $\ker\alpha \subset TP$ называются *горизонтальными*). Любое векторное поле v на X может быть (многими способами) поднято до $U(1)$-инвариантного векторного поля w на P, такого что $dp(w) = v$. Среди таких подъёмов w есть единственное горизонтальное векторное поле $\widetilde{v} = w - \alpha(w)u$, называемое *горизонтальным подъёмом*.

На векторном расслоении L, ассоциированном с P, связность α определяет дифференциальный оператор $\mathcal{C}^\infty(X, L) \xrightarrow{\nabla_\alpha} \mathcal{C}^\infty(X, T^*X \otimes L)$, который называется *ковариантным дифференцированием* сечений. На локальное унитарное сечение σ над маленьким открытым шаром $U \subset X$ этот оператор действует по правилу $\nabla\sigma = 2\pi i\, \xi_\sigma \otimes \sigma$, где $\xi_\sigma = \sigma_P^*\alpha$ — это подъём 1-формы α с P на U вдоль локального сечения $U \xhookrightarrow{\sigma_P} P$, индуцированного (однозначно с точностью до действия $U(1)$) унитарным сечением $U \xhookrightarrow{\sigma} L$. Ковариантная производная произвольного локального сечения $f\sigma$ с $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ вычисляется по формуле $\nabla(f\sigma) = (df + 2\pi i\, f\xi_\sigma) \otimes \sigma$. При выборе другого локального унитарного базиса $\sigma' = h\sigma$ с $h \in C^\infty(U, U(1))$ коэффициенты ξ_σ заменятся на

$$\xi_{\sigma'} = \xi_\sigma - \frac{i}{2\pi}\frac{dh}{h} = \xi_\sigma - \frac{i}{2\pi}\, d\log h\,. \tag{1-5}$$

В частности, локальное сечение $f\sigma$ ковариантно постоянно тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\log f = -2\pi i\, \xi_\sigma\ , \tag{1-6}$$

которое (локально) разрешимо, если и только если $d\xi_\sigma = 0$.

1.3.2. Плоские связности и якобиан. Формула (1-5) показывает, что дифференциалы $d\xi_\sigma$ не зависят от выбора локального унитарного базиса и склеиваются в глобальную замкнутую 2-форму $\omega_a \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X)$, которую мы будем называть *вещественной формой кривизны*[1] связности a. Её подъём $p^*\omega_a = d\alpha_a$ на главное расслоение $P \xrightarrow{p} X$ действует на пару $U(1)$-инвариантных векторных полей v_1, v_2 на P по правилу

$$d\alpha(v_1, v_2) = \Big(\mathcal{L}ie_{v_1}\alpha - d\,(\,\alpha(v_1)\,)\Big)(v_2) = \mathcal{L}ie_{v_1}\alpha(v_2) = -\alpha([v_1, v_2])\,.$$

Из выписанных чуть ниже точных последовательностей (1-8) и (1-7) легко усматривается, что класс когомологий $[\omega_a] \in H^2(X, \mathbb{R})$ является целочисленным и совпадает с первым классом Чженя расслоения L:

$$[\omega_a] = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{R})\ .$$

Эрмитова связность a называется *плоской*, если её кривизна нулевая: $\omega_a = 0$. В этом случае расслоение L топологически тривиально, т. е. обладает глобальным гладким унитарным сечением $X \xhookrightarrow{\sigma} L$. Одновременно, над каждым односвязным открытым множеством U расслоение L будет допускать *ковариантно постоянную* тривиализацию, поскольку уравнения (1-6) будут решаться как $f = c\, e^{-2\pi i g}$, где g — произвольно зафиксированная функция на U с $dg = \xi_\sigma$, а $c \in \mathbb{C}$ — произвольная постоянная. Ковариантно постоянные над U *унитарные* сечения соответствуют $|c| = 1$ и образуют главное однородное пространство над $U(1)$.

В частности, подъём $\pi^*L \longrightarrow \widetilde{X}$ плоского расслоения L на универсальную накрывающую $\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ всегда имеет глобальное ковариантно постоянное унитарное сечение,

[1] обычно *формой кривизны* связности a называют 2-форму $F_a \overset{\text{def}}{=} 2\pi i\, \omega_a$ со значениями в $\mathfrak{su}(1)$

и действие фундаментальной группы $\pi_1(X)$ на таких сечениях определяется унитарным характером $\pi_1(X) \xrightarrow{\chi_\alpha} U(1)$. Он называется *голономией* связности α, и значение $\chi(\gamma)$ есть поворот слоя расслоения L при ковариантном параллельном переносе вдоль петли γ. Когомологический класс $[\chi_\alpha] \in H^1(X, U(1))$ не меняется при калибровочных преобразованиях связности α (т. е. при естественном действии группы $Map(S, U(1))$), и кограничный гомоморфизм длинной последовательности когомологий

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,U(1)) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots , \tag{1-7}$$

ассоциированной с точной тройкой постоянных пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{t\mapsto e^{2\pi i t}} U(1) \longrightarrow 0 , \tag{1-8}$$

переходит $[\chi_a]$ в $0 = c_1(L)$. Таким образом, калибровочные классы плоских унитарных связностей взаимно однозначно соответствуют когомологическим классам унитарных характеров фундаментальной группы и параметризуются точками вещественного тора

$$J_S \stackrel{\text{def}}{=} H^1(S,\mathbb{R})/H^1(S,\mathbb{Z}) , \tag{1-9}$$

который мы будем называть *якобианом* многообразия X.

1.3.3. Якобиевы расслоения. Обозначим через $C = S \times \mathbb{C}$ тривиальное расслоение на S, а через $\mathcal{A}_{\text{FH}}(C)$ — пространство плоских эрмитовых связностей на C. Группа всех гомотопных тождественному диффеоморфизмов $C \xrightarrow{\sim} C$, линейно отображающих слои в слои, изоморфна полупрямому произведению $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} Map(S, U(1)) \rtimes \mathit{Diff}_0(S)$, в котором $\mathit{Diff}_0(S)$ действует на нормальной подгруппе $Map(S, U(1))$ по правилу $h\gamma h^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \circ h^{-1}$. Пространство орбит диагонального действия $\mathcal{G}$ на $Map_{\text{LA}}(S,M) \times \mathcal{A}_{\text{FH}}(C)$, т. е.

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} Map_{\text{LA}}(S,M) \times \mathcal{A}_{\text{FH}}(C)/\mathcal{G} \tag{1-10}$$

называется *якобиевым расслоением* над $\mathfrak{L}$. Его слой над данным гладко погруженным лагранжевым циклом $S \overset{f}{\hookrightarrow} M$ представляет собой пространство классов калибровочно эквивалентных плоских эрмитовых связностей, т. е. якобиан (1-9). Отметим, что имеется канонический линейный эпиморфизм касательного пространства $T_S\mathfrak{L} = Z^1_{\text{DR}}(S)$ базы якобиева расслоения на касательное пространство $TJ_S = H^1(S,\mathbb{R})$ его слоя, переводящий замкнутую 1-форму в её когомологический класс. Существование такого отображения играет в дальнейшем ключевую, хотя и не всегда заметную, роль.

§ 2. Келерова геометрия лагранжевых циклов.

2.1. Предквантовое оснащение. Мы понимаем под таковым фиксацию на симплектическом многообразии (M,ω) комплексного эрмитова линейного расслоения $L \longrightarrow M$ с эрмитовой связностью α, вещественная форма кривизны которой совпадает с ω (т. е. сама кривизна равна $F_\alpha = 2\pi i\,\omega$, см. n° 1.3.2). Такое оснащение возможно тогда и тоько тогда, когда когомологический класс симплектической формы является целым:

$$[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z}) \subset H^2(M,\mathbb{R}) .$$

В дальнейшем мы всюду предполагаем, что это условие выполнено и некоторое предквантовое оснащение (M,ω,L,α) зафиксировано. Отметим, что при этом $[\omega]=c_1(L)$, а 1-форма α задаёт *контактную структуру* на главном $U(1)$-расслоении $P \overset{p}{\twoheadrightarrow} M$, тавтологически ассоциированном с L, т. е. соответствующая старшая форма $\alpha\wedge(\,d\alpha\,)^{\wedge n} = \alpha\wedge p^*\omega^{\wedge n}$ нигде не обращается в нуль[1].

Для каждого $k\in\mathbb{N}$ мы обозначаем через $P_k \overset{p_k}{\twoheadrightarrow} M$ главное $U(1)$-расслоение, тавтологически ассоциированное с $L^{\otimes k}$. Связность α стандартным образом индуцирует на P_k эрмитову связность α_k с вещественной формой кривизны $\omega_k = k\omega$. При $k,m\in\mathbb{N}$ эти главные расслоения организуются в коммуутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[rr, two heads, "\mu_{m,k}"] \arrow[dr, "p_k"'] & & P_{mk} \arrow[dl, "p_{mk}"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{2-1}$$

в которых $P_k \overset{\mu_{m,k}}{\twoheadrightarrow} P_{mk}$ суть неразветвлённые накрытия степени m задаваемые послойным возведением в m-тую степень: $z\mapsto z^m$. Четвёрка (M,ω,P_k,α_k) называется предквантовым оснащением *уровня* k на фазовом пространстве (M,ω). Эрмитово линейное расслоение $L^{\otimes k}\twoheadrightarrow M$ называется линейным расслоением предквантования k-того уровня.

2.2. Циклы Бора - Зоммерфельда. Поскольку кривизна связности α_k пропорциональна симплектической форме, ограничение $\varphi^*L^{\otimes k}$ расслоения предквантования на любой лагранжев цикл $S\xrightarrow{\varphi} M$ представляет собой тривиальное расслоение с плоской связностью на S, что задаёт точку на якобиане J_S (см. (1-9)). Сопоставляя такую точку каждому лагранжеву циклу $S\in\mathfrak{L}$, мы получаем сечение якобиева расслоения $\mathfrak{L}\overset{j_k}{\hookrightarrow}\mathcal{J}$ (см. n° 1.3.3). Множество нулей этого сечения называется пространством *циклов Бора - Зоммерфельда* уровня k (коротко: *BS_k-циклов*) и обозначется $\mathcal{B}_k$. Иными словами, лагранжев цикл $S\xrightarrow{\varphi} M$ тогда и только тогда является BS_k-циклом, когда голономия связности $\varphi^*\alpha_k$ на тривиальном расслоении $\varphi^*L^{\otimes k}$ тоже триввиальна, т. е. это расслоение допускает *ковариантно постоянную* тривиализацию $\varphi^*L^{\otimes k}\simeq S\times\mathbb{C}$. Поскольку вместе с $\varphi^*L^{\otimes k}$ при этом ковариантно тривиализуются и все степени $\varphi^*L^{\otimes mk}$, мы имеем естественные вложения:

$$\mathcal{B}_k \overset{\beta_{k,m}}{\hookrightarrow} \mathcal{B}_{mk}\quad \forall\, k,m\in\mathbb{Z} \tag{2-2}$$

2.3. Циклы Планка и расслоение Берри. Как мы уже упоминали выше, 1-форма связности α_k может рассматриваться как контактная структура на P_k с формой объёма

$$\alpha_k\wedge(d\alpha_k)^{\wedge n} = k^n\,\alpha_k\wedge(p^*\omega)^{\wedge n} \tag{2-3}$$

Обозначим через $Map_{\mathrm{LE}}(S,P_k) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ S\xrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k \mid \widetilde{\varphi}^*(\alpha_k) = 0 \right\}$ пространство гладких *лежандровых* отображений (их образы $\varphi(S)\subset P$ являются *лежандровым* циклами для контактной структуры α_k). Пространство орбит

$$\mathcal{P}_k \overset{\mathrm{def}}{=} Map_{\mathrm{LE}}(S,P_k)/\mathit{Diff}_0(S)$$

называется пространством *планковых циклов* k-того уровня.

[1] подробнее о контактных структурах см. в [A, App. 4]

Условимся обозначать через $\varphi = p_k \circ \widetilde{\varphi} : S \longrightarrow M$ композицию лежандрова отображения $S \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ с канонической проекцией $P_k \xrightarrow{p_k} M$. Поскольку $\varphi^*\omega = d\widetilde{\varphi}^*\alpha_k/k = 0$ эта композиция представляет собой BS_k-цикл. Таким образом, любой планков цикл $S \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ $\varphi^* P_k$ есть не что иное, как ковариантно постоянное унитарное сечение расслоения $\varphi^* L^{\otimes k}$ над S, т. е. BS_k-цикл вместе с фиксированной ковариантной тривиализацией $L^{\otimes k}$. Поскольку такие тривиализации образуют главное однородное пространство над $U(1)$ (см. n° 1.3.2), пространство планковых циклов k-того уровня представляет собой главное $U(1)$-расслоение над BS_k-циклами:

$$\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{B}_k \ . \tag{2-4}$$

Это расслоение называется *главным расслоением Берри* уровня k. Тавтологически ассоциированное с ним комплексное линейное эрмитово расслоение $\mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{P}_k$ называется *линейным расслоением Берри*. Как показывают (2-1) и (2-2), послойное возведение в m-тую степень даёт неразветвлённые m-листные накрытия:

$$\mathcal{P}_k \xrightarrow{\widetilde{\mu}_{m,k}} \beta^*_{m,k}\mathcal{P}_{mk} \quad \forall\, k, m \in \mathbb{N} \ , \tag{2-5}$$

т. е. $\beta^*_{k,m}\,\mathcal{L}_{mk} \,=\, \mathcal{L}_k^{\otimes m}$.

2.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Касательное пространство $T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ в гладко вложенном планковом цикле $S \overset{\widetilde{\varphi}}{\hookrightarrow} P_k$ естественно отождествляется с с пространством гладких функций $C^\infty(S)$; при этом дифференциалы $d\widetilde{\mu}_{k,m}$ накрытий (2-5) будут действовать на $C^\infty(S)$ скалярными умножениями на m.*

Доказательство. Рассуждая как и в n° 1.1.2, мы видим, что

$$T_{\widetilde{\varphi}}\big(\mathit{Map}_{\mathrm{LE}}(S, P_k)/\mathit{Diff}_0(S)\big) = \big\{\, v \in C^\infty\left(S,\ N_{P_k/S}\right) \mid \widetilde{\varphi}^*(\mathcal{L}ie_v\alpha_k) = 0 \,\big\} \ ,$$

т. е. касательный вектор к $\mathcal{P}_k$ в $\widetilde{\varphi}$ представляет собой класс локального векторного поля, определённого на P_k вблизи $\widetilde{\varphi}(S)$ и такого что $\mathcal{L}ie_v\alpha_k = 0$, по модулю полей, касательных к $\widetilde{\varphi}(S)$. Вертикальная компонента такого поля имеет вид $f_v \cdot u$, где u — стандартное базисное инвариантное унитарное вертикальное векторное поле на P_k, а $f_v = \alpha_k(v) \in C^\infty(P)$ есть результат свёртки v со связностью α_k. Сопоставление

$$v \longmapsto \widetilde{\varphi}^* f_v \in C^\infty(S) \ , \tag{2-6}$$

корректно определяет отображение $T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k \longrightarrow C^\infty(S)$, ибо α_k аннулирует касательные к $\widetilde{\varphi}(S)$ поля из-за лежандровости $\widetilde{\varphi}$. Это отображение является изоморфизмом, поскольку поле v однозначно (по модулю полей, касательных к $\widetilde{\varphi}(S)$) восстанавливается из $\widetilde{\varphi}^* f_v$. В самом деле, в качестве его вертикальной компоненты можно взять поле $f_v \cdot u$, где f_v — это произвольное гладкое продолжение заданной функции $\widetilde{\varphi}^* f_v \in C^\infty(S)$ на некоторую окрестность образа $\widetilde{\varphi}(S) \subset P_k$, а в качестве горизонтальной компоненты надо взять горизонтальную составляющую любого векторного поля $\widetilde{v}$ на P_k, такого что

$$\widetilde{v} \llcorner d\alpha_k = \frac{1}{k}\, df_v$$

(поскольку $\ker d\alpha_k = \ker p_k^*\omega$ совпадает с вертикальным направлением в TP_k, такое поле существует и его горизонтальная компонента определена корректно). Действительно,

ω-произведение горизонтальной компоненты $dp(v-\alpha_k(v)\cdot u)$ исходного векторного поля v с произвольным полем w на M равна

$$\omega\big(\,dp(v-\alpha_k(v)\cdot u)\,,w\big)=p^*\omega(v,\widetilde{w})=\frac{1}{k}\,d\alpha_k(v,\widetilde{w})=$$
$$=\frac{1}{k}\Big[\mathcal{L}ie_v\alpha_k+d(\alpha_k(v))\Big]\,(\widetilde{w})=\frac{1}{k}\,df_v\,(\widetilde{w})\,,$$

где через $\widetilde{w}$ обозначен горизонтальный подъём поля w с M на P_k. $\square$

2.3.2. Касательное пространство к $\mathcal{B}_k$. Пусть планков цикл $S \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ представляет собой ковариантно постоянное сечение $S \xhookrightarrow{\sigma} \varphi^*P_k$ над гладко вложенным BS$_k$-циклом $S \xrightarrow{\varphi} M$. Предыдущее доказательство позволяет интерпретировать дифференциал

$$T_{\widehat{\varphi}}\mathcal{P}_k \xrightarrow{d\pi|_{\widehat{\varphi}}} T_{\varphi}\mathcal{B}_k$$

проекции расслоения Берри k-того уровня $\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}_k$ как делённый на k внешний дифференциал на многообразии S:

$$C^\infty(S,\mathbb{R}) \xrightarrow{\frac{1}{k}\,d} B^1_{\text{DR}}(S)\ .$$

Таким образом, подпрстранство BS$_k$-циклов $\mathcal{B}_k\subset\mathfrak{L}$ представляет собой *изодрасту*, т. е. $T_S\mathcal{B}_k\simeq B^1_{\text{DR}}(S)$, причём в терминах этого отождествления дифференциалы $d\beta_{k,m}$ вложений (2-2) действуют на $B^1_{\text{DR}}(S)$ скалярными умножениями на m.

2.3.3. Локальные координаты на $\mathcal{P}$ вблизи гладкого цикла. Согласно теореме Дарбу - Вейнстейна (см. n° 1.1.4), подлежащий планкову циклу $S \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ бор-зоммерфельдов цикл $S \xrightarrow{\varphi} M$ можно продолжить до симплектического отображения $U \xhookrightarrow{\widehat{\varphi}} M$ некоторой окрестности U нулевого сечения $S \hookrightarrow T^*S$ кокасательного расслоения. Если обозначить через $S^{(k)}_f\subset T^*S$ график точной 1-формы $df/k\in B^1_{\text{DR}}(S)$, то отображение

$$df \longmapsto \widehat{\varphi}\left(\,S^{(k)}_f\right) \tag{2-7}$$

будет задавать карту на $\mathcal{B}_k$ в окрестности φ, отождествляя эту окрестность с окрестностью нуля в пространстве точных форм $B^1_{\text{DR}}(S)$ (см. n° 1.1.4). Доказательство предложения из (n° 2.3.1) показывает, что отображение 2-7 можно продолжить до отождествления некоторой окрестности нуля в $C^\infty(S,\mathbb{R})=T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ с открытой окрестностью $\widetilde{\varphi}$ в пространстве планковых циклов $\mathcal{P}_k$. В самом деле, обозначим через $P^U_k=\widehat{\varphi}^*P_k$ прообраз главного расслоения P_k относительно дарбу-вейнстейновского погружения $U \xhookrightarrow{\widehat{\varphi}} M$ и рассмотрим ковариантно постоянное продолжение $U \xhookrightarrow{\widehat{\sigma}} P^U_k$ исходной тривиализации $S \xhookrightarrow{\sigma} \varphi^*P_k$ над нулевым сечением $S\subset U$ на всё U (оно существует, поскольку U стягивается на образ нулевого сечения). Мы сопоставим каждой гладкой функции $f\in C^\infty(S,\mathbb{R})$ с $S^{(k)}_f\subset U$ BS$_k$-цикл $S^{(k)}_f$ и тривиализуем над ним P^U_k посредством ковариантно постоянного сечения

$$\sigma_f \overset{\text{def}}{=} e^{if}\widehat{\sigma}\big|_{S^{(k)}_f}\ . \tag{2-8}$$

Полученный планков цикл и будет отвечать функции f в предлагаемой нами карте. Итак, мы ввели в окрестности $\widetilde{\varphi}$ на $\mathcal{P}_k$ координаты, изображающие точки этой окрестности гладкими функциями на S. Мы будем называть их *координатами Дарбу - Вейнстейна* на $\mathcal{P}_k$.

2.3.4. Комплексные координаты Дарбу - Вейнстейна на $T\mathcal{P}_k$. В n° 1.2.3 мы видели, что на всяком касательном расслоении имеется каноническая интегрируемая комплексная структура. На касательном расслоении $T\mathcal{P}_k$ к пространству планковых циклов соответствующие комплексные координаты отождествляют окрестность точки $(f,\widetilde{\varphi})$ (где $S \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ — это планков цикл, а $f \in C^\infty(S) = T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ — касательный вектор к нему) с окрестностью нуля в пространстве гладких комплекснозначных функций $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S,\mathbb{C})$. При этом (в соответствии с обозначениями n° 1.2.3) мы считаем, что вещественные части $\psi_1 \in C^\infty(S,\mathbb{R}) = T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ дают линейную координатизацию слоёв касательного расслоения, а мнимые части $\psi_2 \in C^\infty(S,\mathbb{R})$ представляют собой описанные выше координаты Дарбу - Вейнстейна на $\mathcal{P}_k$ вблизи $\widetilde{\varphi}$. Мы будем называть такие $\psi_1 + i\psi_2$ *комплексными координатами Дарбу - Вейнстейна* на $T\mathcal{P}_k$.

2.4. Полувзвешенные планковы циклы. Мы собираемся скомбинировать каноническую комплексную с структуру на $T\mathcal{P}$ с канонической симплектической структурой на $T^*\mathcal{P}$, чтобы получить интегрируемую келерову структуру на подходящем естественном расслоении над $\mathcal{P}$, допускающем послойное отождествление как с касательным, так и с кокасательным рвсслоением. Таковым расслоением является расслоение полувесов.

2.4.1. Полувеса. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S)$ класс эквивалентных мер на S, содержащий меру μ_0, индуцированную структурой гладкого многообразия (ср. с [M, § 2-6]). Этот класс содержит подкласс $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ *гладких* мер, получающихся из μ_0 умножением на положительную гладкую функцию. Напомним, что эквивалентность $\lambda \sim \mu$ двух мер λ, μ на S означает, что $\lambda(B) = 0 \Leftrightarrow \mu(B) = 0$ для любого борелевского подмножества $B \subset S$. По теореме Радона - Никодима это равносильно существованию пары положительных интегрируемых вещественных функций:

$$\varrho_{\mu\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} \in L^1(S,\lambda) \qquad \text{and} \qquad \varrho_{\lambda\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \in L^1(S,\mu)$$

которые удовлетворяют условиям $\int_B d\mu = \int_B \varrho_{\mu\lambda}\, d\lambda$ и $\int_B d\lambda = \int_B \varrho_{\lambda\mu}\, d\mu$ для любого борелевского подмножества $B \subset S$ и называются *производными Радона - Никодима*. Предыдущие условия обычно коротко записывают в виде $\lambda = \varrho_{\lambda\mu}\mu$, ибо, конечно, $\varrho_{\mu\lambda}\varrho_{\lambda\zeta} = \varrho_{\mu\zeta}$ и $\varrho_{\mu\lambda}\varrho_{\lambda\mu} = 1$ почти всюду относительно любой меры из $\mathfrak{M}$.

По определению, *полувес* (в другой терминологии – *σ-функция*) $\vartheta = f\sqrt{\mu}$ на S представляет собой класс эквивалентных пар (f,μ) с $\mu \in \mathfrak{M}$, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(S,\mu)$ по отношению $(f_1,\mu_1) \sim (f_2,\mu_2)$, означающему что $f_1\sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}} = f_2\sqrt{\varrho_{\mu_2\lambda}}$ почти всюду в люой мере из $\lambda \in \mathfrak{M}$. Полувес $f\sqrt{\mu}$ называется *гладким*, если $f \in C^\infty(S)$ и $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Непосредственная проверка (см., к примеру, [M, § 2-6] или [Go, sec 4.1]) показывает, что полувеса на S составляют полное нормированное векторное пространство $\mathfrak{H}(S)$ над $\mathbb{R}$, при этом норма на $\mathfrak{H}(S)$ индуцирована скалярным произведением

$$(\, f_1\sqrt{\mu_1}\,,\, f_2\sqrt{\mu_2}\,) \overset{\text{def}}{=} \int_S f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}\varrho_{\mu_2\lambda}}\, d\lambda\,, \tag{2-9}$$

а линейные комбинации полувесов определяются по формуле

$$t_1 \cdot f_1\sqrt{\mu_1} + t_2 \cdot f_2\sqrt{\mu_2} \overset{\text{def}}{=} \left(t_1 f_1\sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}} + t_2 f_2\sqrt{\varrho_{\mu_2\lambda}}\right)\sqrt{\lambda}$$

(через λ в обоих случаях обозначается произвольная мера $\mathfrak{M}$). Гладкие полувеса образуют всюду плотное подпространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}(S) \subset \mathfrak{H}(S)$.

Группа $Diff_0(S)$ действует на $\mathfrak{H}(S)$ по правилу $(f,\mu) \xmapsto{h} \big(f\circ h^{-1}\,,\,(h^{-1})^*\,\mu\,\big)$, переводя $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$ в себя. Пространства орбит диагонального действия $Diff_0(S)$ на произведениях:

$$\mathfrak{L}^{\rm hw} \overset{\rm def}{=} Map_{\rm LA}(S,M)\times\mathfrak{H}(S)/Diff_0(S) \qquad \mathcal{P}_k^{\rm hw} \overset{\rm def}{=} Map_{\rm LE}(S,P_k)\times\mathfrak{H}(S)/Diff_0(S)\;.$$

называются пространствами *полувзвешенных* лагранжевых и планковых циклов соответственно. Заменяя в этих определениях $\mathfrak{H}$ на $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$, мы получим всюду плотные подпространства $\overset{\circ}{\mathfrak{L}}{}_k^{\rm hw}\subset\mathfrak{L}_k^{\rm hw}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}\subset\mathcal{P}_k^{\rm hw}$ *гладко полувзвешенных* циклов. Отображения забывания $\mathfrak{L}^{\rm hw}\xrightarrow{F}\mathfrak{L}$ и $\mathcal{P}_k^{\rm hw}\xrightarrow{\widetilde{F}}\mathcal{P}_k$ организуются в следующую коммутативную диаграмму векторных расслоений:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_k^{\rm hw} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{F}=\pi^*F|_{\mathcal{B}_k^{\rm hw}}"'] & \mathcal{B}_k^{\rm hw} \arrow[r, hook] \arrow[d, "F|_{\mathcal{B}_k^{\rm hw}}"] & \mathfrak{L}^{\rm hw} \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{B}_k \arrow[r, hook] & \mathfrak{L}\,.
\end{tikzcd} \tag{2-10}$$

2.4.2. Комплексная структура на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$. С каждым полувесом $f\sqrt{\mu}$ ассоциировано вложение касательного пространства $T_{\widetilde{\varphi}(S)}\mathcal{P}_k=C^\infty(S)$ к планковам циклам в касательное пространство к пространству полувесов $T_{f\sqrt{\mu}}\mathfrak{H}\simeq\mathfrak{H}$ по правилу

$$f_1\longmapsto f f_1\sqrt{\mu}\;. \tag{2-11}$$

Все вместе эти отображения дают вложение расслоений $T\mathcal{P}_k\hookrightarrow\mathcal{P}_k^{\rm hw}$, образ которого всюду плотен и совпадает с подрасслоением гладких полувесов: $T\mathcal{P}_k\xrightarrow{\sim}\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$. Это позволяет перенести на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$ каноническую комплексную структуру с $T\mathcal{P}_k$ (см. n° 2.3.4). С точки зрения этой структуры, комплексная координатная окрестность точки $(\widetilde{\varphi},\vartheta)\in\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$, отвечающей гладкому планковому циклу $S\xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}}P$, лежащему над BS$_k$-циклом $S\xhookrightarrow{\varphi}M$ (как в n° 2.3.3) и оснащённому полувесом $\vartheta=f\sqrt{\mu}$, отождествляется с окрестностью нуля в пространстве $C^\infty(S,\mathbb{C})$ гладких комплекснозначных функций на S. Полувзвешенный планков цикл отвечающий при этом функции $\psi=\psi_1+i\psi_2\in C^\infty(S,\mathbb{C})$ строится следующим образом. Вложение BS$_k$-цикла $S\xrightarrow{\varphi}M$ продолжается по Дарбу - Вейнстейну до вложения $U\xrightarrow{\widehat{\varphi}}M$ некоторой окрестности нулевого сечения $U\subset T^*S$, а ковариантно постоянное сечение $S\xhookrightarrow{\sigma}\varphi^*Pk$ — до ковариантно постоянного сечения $U\xhookrightarrow{\widehat{\sigma}}P_k^{U}$ расслоения $P_k^U=\widehat{\varphi}^*P_k$ над U (как в n° 2.3.3). Затем мы рассматриваем BS$_k$-цикл $S_{\psi_2}^{(k)}\subset U$, который является графиком точной 1-формы $d\psi_2/k$, над ним — ковариантно постоянное сечение

$$\sigma_{\psi_2}\overset{\rm def}{=}e^{i\psi_2}\widehat{\sigma}|_{S_{\psi_2}^{(k)}}\;.$$

расслоения P_k^U, и его образ в P_k мы берём в качестве планкова цикла, соответствующего функции $\psi=\psi_1+i\psi_2$. Вещественная часть ψ задаёт на этом цикле полувес $\psi_1\vartheta=f\psi_1\sqrt{\mu}$.

Описанные только что комплексные координаты мы будем называть *комплексными координатами Дарбу - Вейнстейна*. Ассоциированное с ними разложение кастельного пространства к $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$ на вещественную и мнимую составляющие имеет вид

$$T_{(\widetilde{\varphi},\vartheta)}\,\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}\simeq T_\vartheta\,\overset{\circ}{\mathfrak{H}}\,(S)\oplus T_{\widetilde{\varphi}}\,\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}\simeq C^\infty(S)\oplus C^\infty(S) \tag{2-12}$$

2.4.3. Симплектическая и риманова структуры на $\mathcal{P}_k^{\mathrm{hw}}$. Рассматрим произведение двух полувесов $\vartheta_1 = f_1\sqrt{\mu_1}$, $\vartheta_2 = f_2\sqrt{\mu_2}$ как произведение функции на меру (ср. с [M, § 2-6]):

$$\vartheta_1\vartheta_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1}\varrho_{\mu_2\lambda}}\,\lambda\ ,$$

(с произвольным $\lambda \in \mathfrak{M}$) и определим *интегрирование по* $\vartheta_1\vartheta_2$ формулой

$$\int_S f\, d\vartheta_1\vartheta_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_S f f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}\varrho_{\mu_2\lambda}}\, d\lambda\ , \tag{2-13}$$

которая, очевидно, не зависит от выбора $\lambda \in \mathfrak{M}$. В частности, квадрат любого полувеса ϑ может рассматриваться как линейный функционал

$$\varkappa(\vartheta)\ :\quad f \longmapsto \int_S f\, d\vartheta^2 \tag{2-14}$$

на касательном пространстве $T_{\widetilde{\varphi}(S)}\mathcal{P}_k \simeq C^\infty(S)$. Иначе говоря, мы имеем послойно квадратичное накрытие векторных расслоений над $\mathcal{P}_k$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_k^{\mathrm{hw}} \arrow[rr, "\varkappa"] \arrow[dr] & & T^*\mathcal{P}_k \arrow[dl] \\ & \mathcal{P}_k & \end{tikzcd}$$

разветвлённое над нулевым сечением. Дифференциал этого накрытия над полувесом ϑ отображает полувес ϑ_1 в линейный функционал

$$d\varkappa_\vartheta(\vartheta_1)\ :\quad f \longmapsto 2\int_S f\, d\vartheta\vartheta_1$$

на $C^\infty(S) = T_{\widetilde{\varphi}(S)}\mathcal{P}_k$ и, тем самым, отождествляет $T^*\mathcal{P}_k$ с $\mathcal{P}_k^{\mathrm{hw}}$.

Пользуясь эти отождествлением мы можем поднять каноническую 1-форму действия η (см. n° 1.1.1) с кокасательного расслоения $T^*\mathcal{P}_k$ до 1-формы $\mathrm{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varkappa^*\eta$ на расслоении полувесов. В терминах расщепления (2-12) форма H действует на касательный вектор $v = (\vartheta_1, f_1) \in T_{(S,\vartheta_0)}\mathcal{P}^{\mathrm{hw}} \simeq \mathfrak{H}(S) \oplus C^\infty(S)$ по правилу

$$\mathrm{H}(v) = 2\int_S f_1\, d\vartheta_0\vartheta_1\ . \tag{2-15}$$

а её дифференциал $\Omega = d\mathrm{H}$ — по правилу

$$\Omega\big(\,(\,\vartheta_1, f_1\,)\ ,\,(\,\vartheta_2, f_2\,)\,\big) = \int_S f_2\, d\vartheta_0\vartheta_1 - \int_S f_1\, d\vartheta_0\vartheta_2\ , \tag{2-16}$$

которые непосредственно обобщают соотвветствующие конечномерные формулы[1] из (1-3).

[1] Отметим, что такой бесконечномерный аналог канонического формализма в простейшем частном случае $S = S^1$ широко используется при анализе уравнения Кортевега - Де Фриза (см. [ДКН], а также наш § 4); он также возникает в гамильтоновом анализе вихревых потоков в несжимаемой жидкости.

В терминах комплексных координат Дарбу - Вейнстейна (см. n° 2.4.2) вещественные касательные векторы $(\psi_1, 0)$ симплектически перемножаются с мнимыми касательными векторами $(0, \psi_2)$ по формуле

$$\Omega\big(\,(\,\psi_1, 0\,)\ ,\ (\,0, \psi_2\,)\,\big) = \int_S \psi_1 \psi_2 \, d\vartheta_0^2$$

правая часть которой есть не что иное как L^2-произведение ψ_1 и ψ_2 по мере ϑ_0^2. В частности, Ω согласована (в смысле n° 1.2) с описанной выше комплексной структурой на $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$, т. е. соответствует интегрируемой келеровой структуре на $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$, третья ипостась которой — риманова метрика G на $T_{(S,\vartheta_0)}\mathcal{P}^{\text{hw}} = C^\infty(S) \oplus \mathfrak{H}(S)$ — задаётся формулой

$$G\big(\,(\vartheta_1, f_1)\,,\,(\vartheta_2, f_2)\,\big) = \int_S f_2 \, d\vartheta_1 \vartheta_0 + \int_S f_1 \, d\vartheta_2 \vartheta_0 \ . \tag{2-17}$$

Итак, нами установлена

2.4.4. ТЕОРЕМА. *Пространство гладко полувзвешенных планковых циклов k-того уровня $\mathcal{P}_k^{hw}$ несёт естественную структуру бесконечномерного келерова многообразия. Симплекическая и риманова формы, ассоциированные с этой келеровой структурой, задаютсяформулами* (2-16) *и* (2-17). *Комплексно - аналитическая картой в окрестности каждого гладко погруженного гладко полувзвешенного цикла S служит окрестность нуля в пространсстве гладких комплекснозначных функций на S.* $\square$

2.5. Полувзвешенные BS$_k$-циклы фиксированного объёма. Естественное действие группы $U(1)$ на $\mathcal{P}_k$ заменами унитарного ковариантно пстоянного тривиализующего сечения L над каждым BS$_k$-циклом канонически продолжается на касатльное расслоение $T\mathcal{P}_k$, и стало быть, на пространство гладко полувзвешенных циклов $\mathcal{P}_k^{\text{hw}} \subset T\mathcal{P}_k$. Оно, очевидным образом, сохраняет обе формы (2-16), (2-17) (посклькy наше отождествление $T_S\mathcal{P}_k \simeq C^\infty(S)$ вообще не зависит от выбора тривиализации L над S, см. n° 2.3.1). На $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$ имеется естественная $U(1)$-инвариантная *функция объёма*

$$\mathcal{P}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\ vol\ } \mathbb{R}\ :\quad (S, \vartheta) \longmapsto \int_S \vartheta^2\ .$$

Её линии уровня — пространства $\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}$ полувзвешенных планковых циклов фиксированного объёма t — $U(1)$-инвриантны, и соответствующие им пространства орбит

$$\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}/U(1)$$

называются пространствами *полувзвешенных BS_k-циклов фикированного объёма t.*

2.5.1. ТЕОРЕМА. *Пространства $\mathcal{B}_{k,t}^{hw}$ тоже являются бесконечномерными келеровыми многообразиями; их келерова структура индуцирована с $\mathcal{P}_k^{hw}$, в частности, её симплекическая и риманова формы продлжают задаваться формулами* (2-16) *и* (2-17).

Доказательство. В терминах разложения (2-12) пространство $T_{(\tilde\varphi(S),\vartheta_0)}\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}$ состоит из всех пар $v = (f, \vartheta)$, у которых $\displaystyle\int_S d\vartheta\vartheta_0 = 0$, поскольку в координатах Дарбу - Вейнстейна этот интеграл как раз и задаёт инфинитиземальное приращение объёма вдоль касательного вектора v. Факторизация по $U(1)$ спускает такую пару (f, ϑ) в пару $(df, \vartheta) \in$

$T_{(S,\vartheta_0)}\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}$. При этом обе формы (2-16), (2-17) остаются корректно определёнными, поскольку произвол в подёме df до f устраняется соотношениями $\displaystyle\int_S d\vartheta_1\vartheta_0 = \int_S d\vartheta_2\vartheta_0 = 0$. □

2.5.2. Замечание. Отметим, что предыдущая конструкция представляет собой *симплектическую факторизацию* $\mathcal{P}^{\rm hw}_k//U(1)$, ибо в силу коммутативности группы $U(1)$ инвариантная функция vol является *отображением моментов* для действия $U(1)$ на $\mathcal{P}^{\rm hw}_k$, и, факторизуя её линии уровня, мы следуем стандартной процедуре построения симплектического фактора (детальное обсуждение этой контрукции в общем случае см. в [At] и [AB2]).

2.6. Предквантовое оснащение пространств $\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}$. Келеровы многобразия $\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}$ имеют каноническое предквантовое оснащение. В самом деле, ограничение на $\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}$ расслоения $\mathcal{P}^{\rm hw}_k = \widetilde{F}^*\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathcal{B}^{\rm hw}_k$ (это левая горизонтальная стрелка в верхнем ряду диаграммы (2-10)) доставляет главное $U(1)$-расслоение:

$$\mathcal{P}^{\rm hw}_{k,t} \xrightarrow{\pi^{\rm hw}_t} \mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}\ , \tag{2-18}$$

с эрмитовой связностью $\mathfrak{a} \stackrel{\rm def}{=} \mathrm{H}|_{\mathcal{P}^{\rm hw}_{k,t}}$, которая представляет собой ограничение формы действия (2-15) на пространство планковых циклов объёма t. Её вещественная 2-форма кривизны $\omega_{\mathfrak{a}} = \Omega$ тавтологически согласована с симплектической структурой на $\mathcal{B}^{\rm hw}_k$. Более того, эта предквантовое оснащение обладает келеровой поляризацией и может быть подвергнуто *голоморфному квантованию*, которое мы подробно обсудим в следующем параграфе.

2.6.1. Замечание о взвешиваниях. Предквантовое оснащение $(\mathcal{B}^{\rm hw}_{k,t}, \Omega, \mathcal{P}^{\rm hw}_{k,t}, \mathfrak{a})$ позволяет строить предквантовые оснащения на (неполувзвешенном) расслоении Берри $\mathcal{P}_{k,t} \xrightarrow{\pi_t} \mathcal{B}_{k,t}$. На этом расслоении *a priori* нет никакой естественно выделенной эрмитовой связности, и фиксировать такую связность можно посредством подъёма универсальной связности $\mathfrak{a}$ на расслоении $\mathcal{P}^{\rm hw}_{k,t}$ вдоль какого-либо сечения $\mathcal{P}_k \hookrightarrow \mathcal{P}^{\rm hw}_k$. Выбор такого сечения называется *полувзвешиванием* планковых циклов. Полувзвешивание планковых циклов, в свою очередь, можно поднимать с полувзвешивания BS_k-циклов, которое, по определению, есть не что иное как сечение

$$\mathcal{B}_k \hookrightarrow \mathcal{B}^{\rm hw}_k\ , \tag{2-19}$$

Например, если многообразие M псевдокелерово, то, ограничивая его риманову метрику g на лагранжевы циклы, мы можем определить на каждом цикле S каноническую форму объёма $\mu_{S,g}$, индуцированную метрикой; сопоставление циклу S полувеса $\vartheta_{S,g} = 1\cdot\sqrt{\mu_{S,g}}$ называется *келеровым полувзвешиванием*.

§ 3. Голоморфное квантование.

3.1. Келерова поляризация. Для того чтобы проквантовать предквантовое оснащение $(M, \omega, L^{\otimes k}, \alpha_k)$ (см. n° 2.1), его необходимо *поляризовать* (см. [T2]). По определению, *комплексная* (или *келерова*) поляризация представляет собой (интегрируемую) комплексную структуру I на M, превращающую M_I в комплексное келерово многообразие с келеровой формой ω.

Если зафиксировать такую поляризацию, то форма кривизны связности α_k на $L^{\otimes k}$ будет иметь ходжев тип $(1,1)$, так что α_k будет задавать на $L^{\otimes k}$ структуру *голоморфного* векторного расслоения над M_I (см. [ГХ, ch. 3]). Пространство глобальных голоморфных сечений этого расслоения

$$Q_k(M_I) = H^0(M_I, L^{\otimes k}) \ , \tag{3-1}$$

называется *пространством волновых функций уровня* k (см. обзор [K]). В дальнейшем мы для простоты всюду будем предполагать компактность M, из которой, в частности, следует конечномерность всех пространств (3-1). Однако делаем мы это, скорее, отдавая дань алгебро геометрическим традициям, поскольку все дальнейшие конструкции в равной мере могут быть применены и к некомпактному случаю, в частности, к $M = T^*X$, с бесконечномерными пространствами (3-1).

3.1.1. Пространство Харди, проекторы Сёге и тёплицевы операторы. Обозначим через $P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} M$ главное $U(1)$-расслоение, тавтологически ассоциированное с двойственным линейным расслоением L^* к предквантовому эрмитову расслоению L на M_I. Его тотальное пространство является границей расслоения на единичные диски вокруг нулевого сечения L^*:

$$P_{-1} = \partial D_{-1} \ , \quad \text{where } D_{-1} \subset L^* \longrightarrow M_I \ . \tag{3-2}$$

Тотальное пространство D_{-1} представляет собой строго псевдовыпуклую комплексную область (см. [ГР, гл. IX]; ещё раз подчеркнём, что комплексная структура на D строго зависит от выбора келеровой комплексной структуры I на M). Через $L^2(P)$ мы, как обычно, будем обозначать гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства гладких комплекснозначных функций $C^\infty(P_{-1}, \mathbb{C})$ на P_{-1} по норме, ассоциированной с эрмитовым произведением

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{P_{-1}} f\overline{g}\, \alpha_{-1} \wedge (d\alpha_{-1})^{\wedge n} \ , \tag{3-3}$$

где α_{-1} — двойственная к $\alpha = \alpha_1$ связность на L^*, а $\varrho_{-1} = \alpha_{-1} \wedge (d\alpha_{-1})^{\wedge n}$ — форма объёма типа (2-3), индуцированная контактной структурой α_{-1} на P_{-1}.

Замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subset L^2(P_{-1})$, состоящее из всех функций, допускающих голоморфное продолжение на D_{-1}, называется *пространством Харди*, а ортогональный проектор на него:

$$\Pi \, : \, L^2(P_{-1}) \longrightarrow \mathcal{H} \tag{3-4}$$

называется *проектором Сёге*. Пространство Харди может быть разложено в топологическую прямую сумму весовых подпространств естественного действия структурной группы $U(1)$ расслоения $L^* \supset D_{-1} \supset P_{-1}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_k \ .$$

Ясно, что k-е весовое подпространство $\mathcal{H}_k$ этого разложения состоит из всех функций на L^*, послойно представляющих собой однородный полином степени k. Иными словами, имеется естественное отождествление $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^{*\otimes k})$, так что весовое разложение в действительности имеет вид

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k H^0(L^{\otimes k}) \; . \tag{3-5}$$

Более того, описанная выше эрмитова структура на $\mathcal{H}$, очевидно, согласуется с естественными эрмитовыми структурами на $H^0(M, L^{\otimes k})$, определяемыми посредством интегрирования скалярных произведений сечений $L^{\otimes k}$ по форме Лиувиля на M:

$$(f,g)_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_M (f,g)_{L^{\otimes k}}\, \omega^{\wedge n} \; . \tag{3-6}$$

Ортогональные проекторы $L^2(P_{-1}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(L^{\otimes k})$ называются *проекторами Сёге k-того уровня*. С их помощью каждой гладкой функции f на M можно сопоставить серию *тёплицевых операторов* $H^0(L^{\otimes k}) \xrightarrow{Q_f^{(k)}} H^0(L^{\otimes k})$, которые действуют на сечение $\psi \in H^0(L^{\otimes k})$ по следующему правилу: рассмотрим ψ как элемент пространства $\mathcal{H} \subset L^2(P_{-1})$, умножим его там на $p_{-1}^* f$ и спроектируем реультат на $H^0(L^{\otimes k})$ операторм Π_k, т. е.

$$Q_f^{(k)}(\psi) = \Pi_k(p_{-1}^* f \psi) \in H^0(L^{\otimes k}) \; , \tag{3-7}$$

где, напомним, $P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} M$ — это главное $U(1)$-расслоение, тавтологически ассоциированное с L^*. Тёплицевы операторы на $\mathcal{H}$ образуют пуассонову алгебру, которая представляет собой *квантовую деформацию* пуассоновой алгебры гладких функций на симплектическом многообразии M.

3.1.2. Пространства состояний. Голоморфное линейное расслоение $L^{\otimes k}$ стандартным образом определяет рациональное отображение $M_I \longrightarrow \mathbb{P}\left(H^0(L^{\otimes k})^* \right)$, переводящее точку $x \in M_I$ в гиперплоскость

$$Ann\,(x) = \{\, \psi \in H^0(L^{\otimes k}) \mid \psi(x) = 0 \,\} \; .$$

Длинная когомологическая последовательность:

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) \longrightarrow H^0(L^{\otimes k}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) \longrightarrow \cdots$$

ассоциированная с точной тройкой пучков на M:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k} \longrightarrow L^{\otimes k} \xrightarrow{res} \mathcal{O}_M\big|_x \longrightarrow 0$$

(где $\mathcal{I}_x$ — это пучок идеалов точки x, res — эпиморфизм ограничения) показывает, что $H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k})$ является гиперплоскостью, если $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) = 0$. Так как по теоремам Серра $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) = 0$ при $k \gg 0$, отображения

$$\varphi_k \colon M_I \xrightarrow{x \mapsto Ann\,(x)} \mathbb{P}\left(H^0(L^{\otimes k})^* \right) \tag{3-8}$$

будут при $k \gg 0$ голоморфными вложениями. Комбинируя их с изоморфизмами

$$H^0(L^{\otimes k}) \xrightarrow{\sim} \overline{H^0(L^{\otimes k})}^{\,*} \; , \tag{3-9}$$

доставляемыми эрмитовой структурой (3-6), мы получаем антиголоморфные вложения M_I в проективизации пространств волновых функций:

$$\overline{\varphi}_k \colon M_I \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(L^{\otimes k}) \; . \tag{3-10}$$

Пространства $\mathbb{P}H^0(L^{\otimes k})$ называются *пространствами состояний*, а состояния, лежащие в образе $\overline{\varphi}_k$, — *когерентными состояниями*.

3.1.3. Важное замечание. Несмотря на то, что главное расслоение предквантизации $P_k \xrightarrow{p_k} M$ совпадает с обратным образом вдоль (3-10) хопфового расслоения k-той степени на окружности над $\mathbb{P}H^0(M_I, L^{\otimes k})$, 1-форма связности α_k на P_k не обязяна, вообще говоря, совпадать с обратным образом инвариантной 1-формы Фубини - Штуди на расслоении Хопфа.

3.2. Ограничение голоморфных сечений на планковы циклы. Ограничение голоморфного сечения $s \in H^0(M_I, L^{\otimes k})$ на планков цикл $S \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k$ (т. е. на BS_k-цикл $S \xhookrightarrow{\varphi} M$, оснащённый ковариантно постоянным унитарным сечением $S \xhookrightarrow{\sigma} \varphi^* L^{\otimes k}$) представляется гладкой комплекснозначной функцией $\psi_{\widetilde{\varphi}} \in C^\infty(S, \mathbb{C})$, такой что $\varphi^* s = \psi_{\widetilde{\varphi}} \cdot \sigma$. Более того, линейное отображение

$$H^0(M, L^{\otimes k}) \xhookrightarrow{s \mapsto \psi_{\widetilde{\varphi}}} C^\infty(S, \mathbb{C}) \tag{3-11}$$

инъективно в силу следствия из n° 1.2.2 и $\mathbb{C}$-*линейно* по отношению к стандартным комплексным структурам на этих пространствах. Напомним, что комплексное векторное пространство $C^\infty(S, \mathbb{C})$ представляет собой слой *голоморфного* касательного расслоения $T_{(\widetilde{\varphi}, \vartheta)} \overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$ бесконечномерного келерова многообразия $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$ полувзвешенных планковых циклов, причём комплексная структура $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$ соответствует стандартной комплексной структуре на $C^\infty(S, \mathbb{C})$ (см. n° 2.4.2). Таким образом мы имеем следующее вложение когерентных пучков над $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{O}_{\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}} , \tag{3-12}$$

в котором первый член есть пучок голоморфных сечений тривиального векторного расслоения со слоем $\mathcal{H}_k = H^0(M_I, L^{\otimes k})$, а второй — пучок голоморфных векторных полей на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$.

3.2.1. Отображения $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}^{\mathbf{hw}} \xrightarrow{\gamma_k} H^0(M, L^{\otimes k})^*$. Сопоставим полувзвешенному планкову циклу $(\widetilde{\varphi}, \vartheta)$ комплексно линейную форму на $H^0(M, L^{\otimes k})$, значение которой на голоморфном сечении $s \in H^0(M, L^{\otimes k})$ равно

$$\int_S \psi_{\widetilde{\varphi}} \, d\vartheta^2 = \int_S \psi_{\widetilde{\varphi}} \, f^2 \, d\mu \in \mathbb{C} .$$

Мы получаем отображение

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}^{\mathrm{hw}} \xrightarrow{\overline{\gamma}_k} H^0(M, L^{\otimes k})^* , \tag{3-13}$$

гладкое в окрестности каждого гладкого планкова цикла. В локальных комплексных координатах Дарбу - Вейнстейна вблизи $(\widetilde{\varphi}, \vartheta)$ на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_k^{\mathrm{hw}}$ действие линейного функционала $\overline{\gamma}_k(\psi_1 + i\psi_2)$ на $H^0(M, L^{\otimes k})$ задаётся формулой

$$s \longmapsto \int_S \psi_{\widetilde{\varphi}} \psi_1^2 e^{-i\psi_2} \, d\vartheta^2 ,$$

поскольку сечение s голоморфно (т. е. $\alpha_k(s)=0$), а P_k тривиализуется над $S^{(k)}_{\psi_2}$ (т. е. над циклом с координатой $\psi_1+i\psi_2$, см. n° 2.4.2) сечением $e^{i\psi_2}\widehat{\sigma}$. Дифференциал $d\overline{\gamma}_k$ отображает $\psi_1+i\psi_2$ в функционал, действовующий на $H^0(M,L^{\otimes k})$ по правилу

$$s \longmapsto \int_S \psi_{\widetilde{\varphi}}(2\psi_1 - i\psi_2)\,d\vartheta^2\ . \tag{3-14}$$

Правая часть представляет собой стандартное эрмитово скалярное произведение на $L^2(S,\mathbb{C})$ по мере ϑ^2. Поскольку пространство $H^0(M,L^{\otimes k})\subset L^2(S,\mathbb{C})$ конечномерно, любой $\mathbb{C}$-линейный фунционал на нём представляется в виде (3-14) с подходящей *гладкой* функцией $2\psi_1-i\psi_2$ (ибо линейный оператор в конечномерное пространство эпиморфен, если его образ всюду плотен). Таким образом, дифференциал $d\overline{\gamma}_k$ сюръективен.

Композицию отображения (3-14) с доставляемым эрмитовой структурой изоморфизмом (3-9) мы обозначим через

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}^{\mathrm{hw}}_k \xrightarrow{\ \gamma_k\ } H^0(M,L^{\otimes k}) \tag{3-15}$$

Оно сопоставляет гладкому полувзвешенному планкову циклу $(\widetilde{\varphi},\vartheta)$ голоморфное сечение $\gamma_k(\widetilde{\varphi},\vartheta)\in H^0(M,L^{\otimes k})$, удовлетворяющее $\forall\, s\in H^0(M,L^{\otimes k})$ равенству

$$\int_M (\,s\,,\,\gamma_k(\widetilde{\varphi},\vartheta)\,)_{L^{\otimes k}}\,d\varrho = \int_S \psi_{\widetilde{\varphi}}\,d\vartheta^2\ ,$$

а его дифференциал $T_{(\widetilde{\varphi},\vartheta)} \xrightarrow{d\gamma_k} H^0(M,L^{\otimes k})$ инъективен и переводит касательный вектор $\psi=\psi_1+i\psi_2\in C^\infty(S,\mathbb{C})=T_{(\widetilde{\varphi},\vartheta)}\,\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}^{\mathrm{hw}}_k$ в голоморфное сечение $s_\psi\in H^0(M,L^{\otimes k})$, определяемое равенством

$$\int_M (\,s,s_\psi\,)_{L^{\otimes k}}\,d\varrho = \int_S \psi_{\widetilde{\varphi}}\overline{\psi'}\,d\vartheta^2\ ,$$

где $\psi'=2\psi_1+i\psi_2$. Таким образом, он отличается от $\mathbb{C}$-линейного вложения (3-11), которое задавалось ограничением голоморфных сечений на планков цикл, постоянным $\mathbb{R}$-линейным множителем, т. е. отображения (3-15) хоть и не голоморфны, однако имеют *постоянный келеров угол*.

3.2.2. Симплектическая редукция отображений γ_k. Отображения (3-15) эквивариантно по отношению к естественным действиям группы $U(1)$ заменами тривиализующего унитарного сечения слева и скалярными гомотетиями справа — это сразу видно из предыдущих формул для его дифференциала. Оба действия имеют согласованные отображения моментов (т. е. $U(1)$-инвариантными функции) — объём

$$(\widetilde{\varphi},\vartheta)\mapsto vol\,(\widetilde{\varphi},\vartheta) = \int_S d\vartheta^2$$

на левом пространстве и эрмитова длина

$$s \longmapsto \|s\|^2 = \int_M (s,s)_{L^{\otimes k}}\,d\varrho$$

на втором. Таким образом, отображение γ_k факторизуется до отображения симплектических факторов

$$\Big(\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}^{\mathrm{hw}}_k//U(1)\Big) \longrightarrow \big(\,H^0(M,L^{\otimes k})//U(1)\,\big)\ .$$

Напомним, что в n° 2.5 мы описали симплектический фактор $\mathring{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}//U(1)$ (т. е. пространство $U(1)$-орбит на t-ой поверхности уровня отображения моментов) как пространство $\mathring{\mathcal{B}}{}_{k,t}^{\rm hw}$ полувзвешенных BS_k-циклов заданного объёма t. С другой стороны, результатом симплектической редукции эрмитова векторного пространства V по действию группы $U(1)$ гомотетиями[1] является, как известно, его проективизация (см. [At]), т. е. $V//U(1) \simeq V/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}V$. В частности, симплектический фактор $\mathcal{H}_k//U(1)$ — это пространство состояний $\mathbb{P}\mathcal{H}_k$. Таким образом, симплектическая редукция γ_k представляет собой отображение

$$\mathring{\mathcal{P}}{}_{k,t}^{\rm hw} \xrightarrow{\gamma_{k,t}} \mathbb{P}\mathcal{H}_k$$

с эпиморфным дифференциалом и лишь подкруткой на постоянный келеров угол отличается от стандартного *голоморфного* отображения

$$\mathring{\mathcal{P}}{}_{k,t}^{\rm hw} \xrightarrow{\beta_{k,t}} \mathbb{P}\mathcal{H}_k$$

келерова многообразия $\mathring{\mathcal{B}}{}_{k,t}^{\rm hw}$ в проективное пространство $\mathbb{P}\left(H^0(\mathring{\mathcal{B}}{}_{k,t}^{\rm hw}, \mathcal{L}_{k,t})^*\right)$, соответствующее голоморфному линейному расслоению $\mathcal{L}_{k,t}$, тавтологически ассоциированному с главным $U(1)$-расслоением Берри $\mathring{\mathcal{P}}{}_{k,t}^{\rm hw} \xrightarrow{\pi_t} \mathring{\mathcal{B}}{}_{k,t}^{\rm hw}$. Мы будем называть это последнее отображение *голоморфным отображением Бортвика - Паоля - Урибе* и обозначать его β_k. Подчеркнём, что γ_k и β_k сопоставля.т *состояния* каждому полувзвешенному BS_k-циклу фиксированного объёма t.

3.3. Аналитическое описание отображений Бортвика - Паоля - Урибе. Отображения BPU_k были открыты в рамках чисто аналитической теории (см. [BPU]). Дабы читатель мог сопоставить оригинальную конструкцию отображений BPU_k с нашим геометрическим определением мы коротко отметим здесь её основные моменты. Главным техническим средством при построении BPU_k является продолжение проектора Сёге

$$L^2(P,\mathbb{C}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M, L^{\otimes k})$$

на подходящее пространство обобщённых функций $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \supset L^2(P,\mathbb{C})$, содержащее, в частности, δ-функции δ_p всех точек $p\in P$ (при этом используется аппарат *тёплицевых структур*, разработаный в [BG]; мы обсудим его ниже, в n° 3.3.1 и n° 3.3.2). Применяя расширенный проектор Сёге ко всем δ_p с $p \in \widetilde{\varphi}(S) \subset P$, мы получаем семейство голоморфных сечений $\Pi_k\left(\delta_{\widetilde{\varphi}(x)}\right)$, параметризованное точками $x\in S$. Отображение $\mathring{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw} \xrightarrow{\beta_k} H^0(M_I, L^{\otimes k})$ сопоставляет полувзвешенному циклу $(\widetilde{\varphi}(S),\vartheta) \in \mathring{\mathcal{P}}{}_k^{\rm hw}$ голоморфное сечение

$$\beta_k(S,\vartheta) = \int_S \Pi_k(\delta_{\widetilde{\varphi}(x)})d\vartheta\ ,$$

полученное усреднением этого семейства по S. Если обозначить через

$$K_k(p_1,p_2) = \langle\, \Pi_k\left(\delta_{p_2}\right)\,,\, \Pi_k\left(\delta_{p_1}\right) \rangle$$

шварцево ядро расширенного проектора Сёге $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M, L^{\otimes k})$, то на диагонали мы будем иметь $K_k(p,p) = \|\Pi_k\left(\delta_p\right)\|^2 \in L^2(P_k)$, и L^2-норма $K_k(p,p)$ как функции от $p\in P$ будет по теореме Римана - Роха иметь при $k \gg 0$ ассимптотку

$$\|K_k(p,p)\|^2 = \int_{P_k} K_k(p,p)\,\alpha_k\wedge(d\alpha_k)^{\wedge n} = \mathrm{rk}\, H^0(M_I, L^{\otimes k}) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n .$$

[1]по отношению к отображению моментов $v \longmapsto \|v\|^2$

3.3.1. Обощённые тёплицевы операторы. Удалим из кокасательного расслоения T^*P_k нулевое сечение и в полученном пространстве рассмотрим положительный вещественный конус

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t\ \alpha_k|_p \subset T^*P_k \setminus \{0\} \mid p \in P_k\,,\ t \in \mathbb{R},\ t > 0\,\} \tag{3-16}$$

над графиком формы связности $P_k \xhookrightarrow{\alpha_k} T^*P_k \setminus \{0\}$. Этот конус является *симплектическим подмногообразием* кокасательного расслоения, рассматриваемого со стандартной симплектической структурой. Согласно [BG], пара (Π, Σ), где Π — это обычный проектор Сёге (3-4), называется *тёплицевой структурой*. Всякий псевдодифференциальный оператор n-того порядка A на P_k порождает *обобщённый тёплицев оператор*

$$T_A = \Pi \circ A \circ \Pi : L^2(P) \longrightarrow \mathcal{H}\ ,$$

а ограничение $\sigma(T_A) \stackrel{\text{def}}{=} p(A)|_\Sigma$ главного символа $p(A)$ на симплектическое подмногообразие (3-16) называется *символом* обобщённого тёплицева оператора T_A, и эти символы обладают обычными свойствами:

$$\sigma\,(\,T_{A_1}T_{A_2}\,) = \sigma\,(\,T_{A_1}\,)\,\sigma\,(\,T_{A_2}\,)$$
$$\sigma\,(\ [T_{A_1}, T_{A_2}]\ ) = i\ \{\sigma\,(\,T_{A_1}\,)\,, \sigma\,(\,T_{A_2}\,)\}$$

(скобка Пуассона в последнем равенстве индуцируется стандартной симплектической структуры на Σ). В частности, обычный (не обобщённый) тёплицев оператор T_f, соответствующий умножению на функцию $f \in L^2(P_k)$, имеет символ $\sigma(T_f) = p_\Sigma^*(f)$, где через p_Σ обозначена композиция проекций $\Sigma \twoheadrightarrow P_k \xrightarrow{p_k} M$.

3.3.2. Продолжение проектора Сёге. Конормальное расслоение гладкого планкова цикла $N^*\widetilde{\varphi}(S) = Ann\,(T\widetilde{\varphi}(S)) \subset T^*P_k$, будучи лагранжевым подмногообразием кокасательного расслоения T^*P_k, определяет, согласно [BG], серию подпространств *эрмитовых* обобщённых функций $I^m(P_k, N^*S) \subset D(P_k)$ полуцелого порядка $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, при этом $L^2(P_k) \subset I^m(P_k, N^*S)$ как плотное подпространство. Каждая эрмитова обобщённая функция также имеет *символ*, представляющий собой симплектический спинор на N^*S. Установленные в [BG] теоремы о композициях эрмитовых обобщённых функций позволяют продолжить проектор Сёге (3-4) до оператора

$$I^m(P_k, N^*\widetilde{\varphi}(S)) \xrightarrow{\ \Pi\ } \mathcal{D}(\mathcal{H})$$

следующим образом. Шварцево ядро исходного проектора Сёге Π является элементом пространства $I^{\frac{1}{2}}(P_k \times P_k, \Sigma_2)$, где

$$\Sigma_2 = \{\,(p_1, t\alpha(p_1))\,;\ (p_2, -t\alpha(p_2))\,\} \subset T^*P_k \times P_k\ .$$

представляет собой изотропное подмногообразие *сопоставимое* с N^*S в смысле [BG, Th. 9.4], что означает возможность применять ассоциированный с Σ_2 интегральный оператор Фурье к эрмитовым обобщённым функциям на N^*S. Таким образом возникает отображение $I^m(P_k, N^*\widetilde{\varphi}(S)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H})$, образ которого обозначается через $J^{m-\frac{n}{2}}(P_k, S) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H})$ и называется пространством *лежандровых* обобщённых функций порядка $m - \frac{1}{4}\dim M$. Пространство $J^{\frac{1}{2}}(P_k, S)$ естественно отождествляется с пространством полувесов на S, поскольку символ каждого элемента из $J^{\frac{1}{2}}(P_k, S)$, будучи симплектическим спинором на лежандровом подмногообразии $\widetilde{\varphi}(S) \subset P_k$, естественным образом определяет полувес (см. [BG] и [BPU]), и наоборот, всякий полувес ϑ на S позволяет определить δ-функцию $\delta_{(S,\vartheta)}$, сосредоточенную на цикле, и построить по ней лежандрову обобщённую функцию

$$s(\vartheta) = T^{m-\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}ie_{u_k}}\,\Pi(\delta_S)\ ,$$

где через $T_{\mathcal{L}ie_{u_k}}$ обозначен обобщённый тёплицев оператор первого порядка, соответствующий дифференцированию Ли вдоль стандартного базисного $U(1)$-инвариантного векторного поля u_k на P_k (символом этого оператора является функция t — координата вдоль прямолинейной образующей конуса (3-16)).

§ 4. Пример: лежандровы узлы в S^3.

4.1. Предквантовое оснащение сферы Римана. Простейший нетривиальный пример, наглядно иллюстрирующий наши конструкции, возникает, если в качестве исходного симплектического многообразия (M,ω) взять риманову сферу $M = S^2 = \mathbb{CP}_1$ — проективизацию двумерного эрмитова пространства $\mathbb{C}^2$ — с келеровой структурой, индуцированной стандартной эрмитовой формой на $\mathbb{C}^2$. В стандартной аффинной карте $z = z_0/z_1$ на $\mathbb{CP}_1$ соответствующие риманова метрика и симплектическая форма задаются формулами

$$g = \frac{4\,dzd\overline{z}}{(\,1+|z|^2\,)^2} \qquad \text{и} \qquad \omega = \frac{4\,dz\wedge d\overline{z}}{(\,1+|z|^2\,)^2}$$

В качестве линейного расслоения предквантования на $\mathbb{CP}_1$ мы возьмём пучок $L = \mathcal{O}(1)$ однородных форм первой степени со стандартной связностью, которая является ограничением на $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ $U(2)$-инвариантной 1-формы

$$2\pi i\,\alpha_1 \overset{\text{def}}{=} \left(\partial - \overline{\partial}\right)\,\log|z|$$

и имеет вещественную форму кривизны ω. Расслоение единичных окружностей в двойственном расслоении $L^* \supset P_{-1} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}_1$ есть не что иное как расслоение Хопфа

$$S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}_1\ ,$$

слой которого над точкой, изображающей прямую $\ell \subset \mathbb{C}^2$, представляет собой единичную окружность, высекаемую этой прямой на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ (класс этого расслоения служит стандартной «отрицательной» образующей группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$).

4.2. Лагранжевы циклы, или уникурсальные кривые на S^2. Возьмём в качестве многообразия S — прообраза лагранжевых циклов на $M = S^2$ — окружность $S = S^1$. Поскольку любое гладкое отображение $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$ лагранжево ввиду отсутствия на окружности ненулевых 2-форм, пространство лагранжевых отображений $Map_{\text{LA}}(S^1,S^2)$ есть не что иное как пространство петель LS^2, а пространство лагранжевых циклов $\mathfrak{L} = Map_{\text{LA}}(S^1,S^2)/Diff_0(S^1)$ представляет собой пространство *уникурсальных кривых* (непараметризованных петель) $\varphi(S^1) \subset S^2$. Отметим, что на каждом касательном пространстве к пространству петель $T_\varphi\,(\,LS^2\,) = C^\infty(S^1,\varphi^*TS^2)$ имеется невырожденная косая форма $\varphi^*\omega$, которая индуцирует косую 2-форму

$$\Omega_{LS^2}(\sigma_1,\sigma_2) = \int_{S^1} \varphi^*\omega^{-1}(\sigma_1)\wedge\varphi^*\omega^{-1}(\sigma_2) \tag{4-1}$$

на $T\,(\,LS^2\,)$. Эта форма $\mathit{Diff}_0(S^1)$-инвариантна, замкнута, но невырождена лишь в слабом смысле, т. е. сопоставляет гамильтоновы векторные поля только *сверхгладким* функциям на $\mathfrak{L}$ (см. [Br, def. 3.1.5]).

4.2.1. Координаты Дарбу - Вейнстейна. Как это объяснялось в n° 1.1.2, мы можем отождествить некоторую окрестность нулевого сечения нормального расслоения к S^1 при гладком погружении $S^1 \xhookrightarrow{\varphi} S^2$ с окрестностью нулевого сечения кокасательного расслоения на S^1, которое *тривиально*:

$$N_\varphi S^1 = \varphi^* TS^2/TS^1 \simeq \varphi^* T^*S^2/Ann\,(TS^1) = T^*S^1 = S^1 \times \mathbb{R}\ . \tag{4-2}$$

Мы зафиксируем последнюю тривиализацию, выбрав в качестве глобального базисного сечения кокасательного расслоения инвариантную относительно вращений 1-форму

$$\xi \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\,dt\,,$$

где t — натуральный параметр на окружности (ориентированный угол), так что

$$\int_{S^1} \xi = 1\ .$$

Эта форма определяет на окружности гладкую меру μ_0, которую мы и будем использовать далее при рассмотрении полувесов. Согласно n° 1.1.4 всякое гладкое погружение $S^1 \longrightarrow S^2$ можно гладко продолжить до отображения $U \xrightarrow{\widehat{\varphi}} S^2$ некоторой окрестности $U \subset T^*S^1$ нулевого сечения кокасательного расслоения так, что $\widehat{\varphi}^*\omega = d\eta$, где η — каноническая форма действия на T^*S^1. Образы лежащих в U графиков замкнутых 1-форм составят открытую окрестность φ на $\mathfrak{L}$, которую мы будем использовать для локальной координатизации $\mathfrak{L}$ вблизи φ окрестностью нуля в пространстве замкнутых 1-форм на S^1.

4.2.2. Циклы Бора - Зоммерфельда. Для каждого целого $k \geq 0$ подъём $\varphi^*L^{\otimes k}$ вдоль произвольной петли $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$ представляет собой тривиальное комплексное 1-расслоение над S^1, оснащённое плоской $U(1)$-связностью $\varphi^*\alpha_k$. Её голономия — это характер фундаментальной группы $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\chi_k} U(1)$, значение которого на образующей $1 \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ равно углу поворота слоя $\varphi^*L^{\otimes k}$ при его параллельном переносе по S^1 на один оборот в положительном направлении:

$$\chi_k(1) = k \cdot \chi_1(1)$$

и, таким образом, представляет собой целое кратное ориентированной площади куска сферы S^2, ограниченного уникурсальной кривой $\varphi(S^1)$. Отображение

$$j_k\ :\quad LS^2 \xhookrightarrow{\varphi \mapsto k\cdot\chi_k(1)} \mathcal{J}$$

является сечением якобиева расслоения (см. n° 1.3.3). Поскольку $H^1(S^1,\mathbb{R})/H^1(S^1,\mathbb{Z}) = U(1)$, в нашем примере якобиево расслоение оказывается главным $U(1)$-расслоеним над LS^2. Множество нулей $\mathcal{B}_k \subset \mathfrak{L}$ сечения j_k имеет коразмерность 1 и называется пространством бор-зоммерфельдовых циклов уровня k. Оно состоит из уникурсальных кривых площадь которых является рациональным (со знаменателем k) кратным площади сферы; в частности, $\forall\, k, m \in \mathbb{Z}$ имеются включения

$$\mathcal{B}_k \xhookrightarrow{\beta_{k,m}} \mathcal{B}_{mk}$$

(ср. с (2-2)).

4.2.3. Замечание о специфике рассматриваемого примера. Отметим, что в нашем примере есть ряд специальных эффектов, отсутствующих в общем случае: во-первых, кокасательное расслоение на $S = S^1$ тривиально; во-вторых, $S = S^1$ является главным однородным пространством над $U(1)$, в частности $U(1) \subset \mathit{Diff}_0(S^1)$; и наконец, $U(1)$ естественно отождествляется с якобианом $J(S^1) = H^1(S^1, \mathbb{R})/H^1(S^1, \mathbb{R})$.

4.3. Планковы циклы, или лежандровы узлы в S^3. Планков цикл уровня k представляет собой класс $\mathit{Diff}_0(S^1)$-эквивалентных гладких вложений $S^1 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} S^3$, лежандровых по отношению к контактной форме α_k на $S^3 \simeq P_k$. Такие циклы обычно называют *лежандровыми узлами* на S^3. С нашей точки зрения, каждый такой узел представляет собой ковариантно постоянное глобальное сечение $S^1 \xhookrightarrow{\sigma} \varphi^* P_k$ главного расслоения предквантования над бор-зоммерфельдовым циклом $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$, или, что то же самое, ковариантно постоянное глобальное унитарное сечение тривиального эрмитова линейного расслоения $\varphi^* L^{\otimes k}$ над S^1. Таким образом, планковы циклы уровня k образуют главное $U(1)$-расслоение $\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{B}_k$ над пространством бор-зоммерфельдовых циклов. Это расслоение называется *главным расслением Берри* уровня k. Соответствующие эрмитовы линейные расслоения $\mathcal{L}_k$ на $\mathcal{B}_k$ связаны соотношениями

$$\beta^*_{k,m}\,\mathcal{L}_{mk} \,=\, \mathcal{L}_k^{\otimes m}\,.$$

Касательное пространство $T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ в гладком узле $S^1 \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} P_k \simeq S^3$ отождествляется с пространством гладких функций $C^\infty(S^1)$. С учётом дополнительных совпадений, перечисленных в n° 4.2.3, это почти очевидно: $T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ есть пространство гладких сечений нормального расслоения

$$N_{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\varphi}^* T^* P_k / TS^1 = T^* S^1 \oplus T^* U(1) = S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,$$

(последнее равенство соответствует (4-2), а предпоследнее — это глобальное расщепление на горизонтальную и вертикальную компоненты относительно связности[1] α_k); каждая функция $f \in C^\infty(S^1)$ задаёт сечение $\tau_f \in C^\infty(S^1, N_{\widetilde{\varphi}})$, вертикальная компонента которого равна $kf\xi$, а горизонтальная — $k\,df$, где $\xi \in C^\infty(T^*S^1)$ — это базисная 1-форма на $S^1 = U(1)$, зафиксированная нами в n° 4.2.1 и (4-2), так что $k\,df = 2\pi k\,\frac{df}{dt}\,\xi$.

4.4. Полувзвешенные циклы. Инвариантная форма ξ определяет на S^1 гладкую меру μ_0 и пространство полувесов $\mathring{\mathfrak{H}} = \mathring{\mathfrak{H}}\,(S^1)$; соответствующие пространства орбит естественного диагонального действия диффеоморфизмов окружности

$$\mathring{\mathfrak{L}}^{\mathrm{hw}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathit{Map}_{\mathrm{LA}}(S^1, S^2) \times \mathring{\mathfrak{H}}\,(S^1)/\mathit{Diff}_0(S^1) \qquad \mathring{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{hw}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathit{Map}_{\mathrm{LE}}(S^1, S^3) \times \mathring{\mathfrak{H}}\,(S^1)/\mathit{Diff}_0(S^1)\ .$$

суть пространства *полувзвешенных* уникурсальных кривых и лежандровых узлов соответственно. Фиксация полувеса $f\sqrt{\mu}$ на лежандровом узле отождествляет касательное пространство $T_{\widetilde{\varphi}}\mathcal{P}_k = C^\infty(S^1)$ с $T_{f\sqrt{\mu}}\,\mathring{\mathfrak{H}} \simeq \mathring{\mathfrak{H}}$ путём сопоставления гладкой функции f_1 полувеса $ff_1\sqrt{\mu}$. В результате над каждым гладким узлом $S^1 \xhookrightarrow{\widetilde{\varphi}} S^3$ полувеса $\vartheta = f\sqrt{\mu}$, лежащем над уникурсальной кривой $S^1 \xhookrightarrow{\varphi} S^3$ мы имеем разложение (2-12):

$$T_{(\widetilde{\varphi},\vartheta)}\,\mathring{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{hw}} \simeq T_\vartheta\,\mathring{\mathfrak{H}}\,(S^1) \oplus T_{\widetilde{\varphi}}\,\mathring{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{hw}} \simeq C^\infty(S^1) \oplus C^\infty(S^1)\ ,$$

[1]в общем случае такое расщепление имеется лишь локально

и конструкция Дарбу - Вейнстейна отождествляет некоторую окрестность $(\widetilde{\varphi}, \vartheta)$ внутри $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{hw}}$ с окрестностью нуля в пространстве гладких комплекснозначных функций $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ так, что по мнимой части ψ_2 восстанавливается сам узел — как график сечения $(d\psi_2, e^{i\pi\psi_2})$ расслоения

$$\widehat{\varphi}^* P_k|_U \subset T^*S^1 \times U(1) ,$$

а по вещественной части ψ_1 восстанавливается полувес $\psi_1 \vartheta = \psi_1 f \sqrt{\mu}$. Таким образом, на пространстве полувзвешенных планковых циклов возникает интегрируемая комплексная структура и согласованная с ней симплектическая форма, которая действует в каждом слое касательного расслоения $T_{(\widetilde{\varphi}, \vartheta_0)} \mathring{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{hw}}$ по правилу

$$\Omega\big((\vartheta_1, f_1) , (\vartheta_2, f_2) \big) = \int_{S^1} f_2 \, d\vartheta_0 \vartheta_1 - \int_{S^1} f_1 \, d\vartheta_0 \vartheta_2 .$$

()и является дифференциалом от 1-формы $\mathrm{H}\,((\vartheta_1, f_1)) = 2 \int_{S^1} f_1 \, d\vartheta_0 \vartheta_1)$, а также допоняющая их до келеровой тройки риманова метрика

$$G\big((\vartheta_1, f_1) , (\vartheta_2, f_2) \big) = \int_{S^1} f_2 \, d\vartheta_1 \vartheta_0 + \int_{S^1} f_1 \, d\vartheta_2 \vartheta_0 .$$

Эта келерова структура спускается (посредством симплектической редукции относительно действия $U(1)$-на слоях расслоений Хопфа) до келеровой структуры на пространстве $\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\mathrm{hw}}$ полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов фиксированной длины

$$t = \int_{S^1} d\vartheta^2 .$$

Отметим, что в нашем примере слои забывающего отображения

$$\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\mathrm{hw}} \longrightarrow \mathcal{B}_{k,t} \tag{4-3}$$

естественно отождествляются с фактором $\mathit{Diff}_0(S^1)/U(1)$, поскольку выбор полувеса эквивалентен выбору на окружности натурального параметра по модулю поворотов. На пространстве $\mathit{Diff}_0(S^1)/U(1)$ имеется хорошо известная комплексная структура (см. [K]). С другой стороны, на пространстве $\mathcal{B}_{k,t}$ также известна почти комплексная структура, задаваемая следующим образом. Если отождествить S^1 с $U(1)$ (как мы уже упоминали в n° 4.2.3), то нормальное расслоение к любой петле $S^1 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} S^3$ можно разложить в прямую сумму $N_{\widetilde{\varphi}} = T^*S^1 \oplus T^*U(1)$, что определяет почти комплексную структуру на всём пространстве петель LS^3, касательное пространство $T_{\widetilde{\varphi}} LS^3$ к которому есть пространство гладких сечений $C^\infty(S^1, N_{\widetilde{\varphi}})$. Эта почти комплексная структура ограничивается на подпространство лежандровых узлов и спускается до почти комплексной структуры на $\mathcal{B}_{k,t} = \mathcal{P}_{k,t}/U(1)$. Легко видеть, что забывающее отображение (4-3) оказывается по отношению к только что описанным структурам псевдоголоморфным и с псевдоголоморфными слоями.

Список цитированных работ.

[А] *В. И. Арнольд. Математические методы классической механики*. М. «Наука» (1989)

[ГР] *Р. Ганнинг, Х. Росси. Аналитические функции многих комплексных переменных*. М. «Мир» (1969)

[ГХ] *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии, т. 1*. М. «Мир» (1982)

[ДКН] *Б. А. Дубровин, И. М. Кричивер, С. П. Новиков. Интегрируемые системы I*, М. ВИНИТИ, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные Направления», т. 4 (1985)

[К] *А. А. Кириллов. Геометрическое квантование*. М. ВИНИТИ, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные Направления», т. 4 (1985)

[At] *M. F. Atiyah. The Moment Map In Symplectic Geometry*. Durham Symp. on Global Riemannian Geometry. Ellis Horwood Ltd. (1984), pp. 43–51

[AB1] *M. F. Atiyah, R. Bott. The Yang - Mills Equations Over Riemann Surfaces*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **108** (1988), pp. 523–615

[AB2] *M. F. Atiyah, R. Bott. The Moment Map And Equivariant Cohomology*. Topology **23** (1984) No 1, pp. 1–28

[AM] *R. Abraham and J. Marsden. Fondation of mechanics*. 2nd ed., Benjamin, Reading Mass. (1978).

[BFFLS] *F. Bayen, M. Flato, C. Frosdal, A. Lichnerovicz and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. Part I, II and III*. Lett.Math.Phys. **1** (1977), pp. 521–530 & Ann. Phys. **111** (1978), pp. 61–151.

[BG] *L. Boutet de Monvel, V. Guillemin. The spectral theory of Toeplitz operators*. Ann. Math. Studies, Princeton Univ. press **99** (1981).

[BMS] *M. Bordemann, E. Meinreken and M. Schlichenmair. Toeplitz quantization of Kähler manifolds and* $\mathfrak{gl}(n)$, $n \to \infty$ *limits*. Commun.Math. Phys.. **165** (1994), pp. 281–296.

[BPU] *D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe. Legendrian distributions with applications to relative Poincare series*. Invent. math. **122** (1995), pp. 359–402.

[Br] *J.-L. Brylinski. Loop Spaces, Characteristic Classes, And Geometric Quantization*. Progress in Math. **107**, Birkhäuser (1992) .

[CF] *A. Cattaneo and G. Felder. A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*. math.QA/9902090. (1999), pp. 1–22.

[De] *P. Deligne. Deformation de l'algebre des fonctions d'une variete symplectic: Comparison entre Fedosov et de Wilde-Lecomte*. Sel. Math., New Ser.. **1** (1995), pp. 667–697.

[Go] *M. de Gosson. Maslov Classes, Metaplectic Representation, And Lagrangian Quantization*. Academic Verlag, Math. Res. vol. 95 (1997).

[GS] *V. Gullemin, S. Sternberg. Geometric Asymptotics*. John Wiley & Sons Inc. (1978).

[Hi1] *N. J. Hitchin. Flat Connections And Geometric Quantization*. Commun. Math. Phys. **131**, (1990), pp. 347–380.

[Hi2] *N. J. Hitchin. Lectures On Special Lagrangian Submanifolds*. Препринт, доступен в arXiv: math.DG/9907034

[M] *G. W. MacKey. Mathematical Foundations Of Quantum Mechanics*. Benjamin, Reading, Mass. (1963).

[R] *J. H. Rawnslay. Coherent States And Kähler Manifolds*. Qart. J. of Maths. **28** (1997), pp. 404–415.

[T1] *A. N. Tyurin. On Bohr-Sommerfeld bases*. Univ. of Warwick preprint: Sept. 1999 / Publication 216.

[T2] *A. N. Tyurin. Geometric quantization and mirror symmetry*. Препринт, доступен в arXiv: math.AG/9902027.

[T3] *A. N. Tyurin. Complexification of Bohr - Sommerfeld conditions*. Препринт, доступен в arXiv: math.AG/9909094.

[We1] *A. Weinstein. Symplectic geometry*. BAMS v 5, N 1 (1981)

[We2] *A. Weinstein. Connections of Berry and Hannay Type for Moving Lagrangian Submanifolds*. Advances in Math **82**(1990), pp. 133–159.

[We3] *A. Weinstein. Lagrangian Submanifolds And Hamiltonian Systems*. Ann. of Math. **98** (1973), pp. 377–410.

[We4] *A. Weinstein. Symplectic Manifolds And Their Lagrangian Submanifolds*. Adv. in Math. **6** (1971), pp. 329–346.